Università degli studi di Pisa

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali

Corso di Laurea in Matematica

Tesi di Laurea Specialistica

Dinamica di applicazioni olomorfe tangenti all'identità

Candidato:
Marco Arizzi

Relatore:
Prof. Marco Abate

Controrelatore:
Prof. Alberto Abbondandolo

Anno Accademico 2009/2010

Indice

Introduzione

In questa tesi tratteremo la dinamica delle applicazioni olomorfe tangenti all'identità. Dato un germe $F \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^p, 0)$ che fissa l'origine e per cui $dF_0 = id$, vogliamo studiarne la dinamica in un intorno del punto fisso 0; per ogni punto q che sta in un intorno dell'origine, vogliamo descrivere il comportamento asintotico della successione $\{F^k(q)\}_{k \geq 0}$ delle iterate di F in q, dove F^k è la composizione di F con se stessa k volte.

Lo studio di queste applicazioni rientra nella teoria dei sistemi dinamici discreti olomorfi locali e, più in generale, si inserisce in un più ampio campo di ricerca, che è la teoria dei sistemi dinamici, che tuttora è uno dei settori di punta della matematica contemporanea. Ciò è dovuto al fatto che i sistemi dinamici formano un tipico campo di frontiera, in cui sono utilizzate tecniche prese a prestito da tutta la matematica, dalla teoria della misura, dalla geometria differenziale e algebrica, dalla geometria degli spazi di Banach e dalle equazioni differenziali ordinarie.

La teoria dei sistemi dinamici discreti olomorfi locali è nata più o meno in contemporanea con l'intera teoria dei sistemi dinamici (i primi risultati di una certa importanza sono dovuti a Kœnigs [K], nel 1884, e Poincaré, nel 1890), e si è sviluppata parallelamente al resto della teoria dei sistemi dinamici olomorfi discreti. In particolare, i principali risultati in una variabile sono quelli ottenuti da Fatou [F1, F2, F3] e altri negli anni '20, e quelli ottenuti da Yoccoz [Y1, Y2] e altri negli anni '80. La teoria in più variabili è invece nata essenzialmente negli anni '80 con i lavori di Écalle [E1, E2], ed è tuttora in pieno sviluppo, grazie ai lavori di Fornæss, Sibony e altri [AB].

In questa tesi considereremo una possibile generalizzazione al caso di dimensione maggiore di 1 del Teorema di Leau-Fatou, che riguarda i sistemi dinamici discreti olomorfi locali in una sola variabile, e afferma

Teorema 0.1 (Teorema di Leau-Fatou, [F1]). *Sia $f(z) = z + a_{k+1}z^{k+1} + O\left(z^{k+2}\right)$, con $k \geq 2$ e $a_{k+1} \neq 0$, una funzione olomorfa che fissa l'origine. Allora esistono k direzioni attrattive $v_1, \ldots, v_k$ e k domini disgiunti $D_1, \ldots, D_k$ (detti petali), che hanno l'origine nel bordo, invarianti per f (cioè $f(D_j) \subset D_j$) e tali che $(f|_{D_j})^n \to 0$ lungo v_j, per $n \to \infty$, per $j = 1, \ldots, k$, dove f^n indica l'n-esima iterata di f.*

In particolare prenderemo $F \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^p, 0)$ con $dF_0 = id$, di ordine $k+1$, cioè che si può scrivere nel seguente modo

$$F(z) = z + P_{k+1}(z) + P_{k+2}(z) + \cdots \in \mathbb{C}\{z_1, \ldots, z_p\}^p,$$

dove P_{k+1} è il primo termine non nullo nell'espansione omogenea di F e $k \geq 2$. Lo studio della dinamica di questi germi è cominciato essenzialmente negli anni '80 e i principali risultati sono stati ottenuti da Écalle [E1, E2] e Hakim [H1, H2] ed è tuttora in sviluppo grazie anche ai lavori di Abate [A1, A2, AT] e altri. Lo studio di Écalle si basa sulla teoria della risorgenza delle serie divergenti, mentre quello di Hakim è più classico. La tesi seguirà il secondo approccio e prevederà lo sviluppo delle tecniche adottate da Hakim, che provengono dalla geometria algebrica (blow-up) e dall'analisi funzionale (operatori tra spazi di Banach). In particolare cercheremo di semplificare la dinamica di F, a meno di complicare lo spazio ambiente; per farlo, applicheremo opportuni scoppiamenti dell'origine, in modo tale da sollevare F ad una $\tilde{F}$ con certe proprietà.

Nei primi due capitoli vedremo come è possibile generalizzare i concetti di petalo e di direzione attrattiva, introdotti nel caso unidimensionale. Introdurremo le nozioni di curva e di varietà parabolica, per trovare insiemi su cui la dinamica del germe è attrattiva, e il concetto di direzione caratteristica, per individuare quali direzioni sono dinamicamente significative. Inoltre studieremo il blow-up di punti di una varietà, che sarà utile per semplificare la scrittura dei germi. Infine, data una direzione caratteristica $[v]$, definiremo i direttori, che, in un certo senso, determinano la dimensione della più grande varietà parabolica tangente a $[v]$.

Nel terzo capitolo si vedrà che, fissata una direzione caratteristica $[v]$, è possibile modificare la forma del germe, in modo da renderla più semplice.

Nel quarto capitolo riusciremo a dimostrare la seguente generalizzazione del Teorema di Leau-Fatou, dovuta ad Hakim:

Teorema 0.2 ([H1]). *Sia $F \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^p, 0)$ un sistema dinamico olomorfo locale tangente all'identità di ordine $k+1$. Allora per ogni direzione caratteristica non degenere $[v] \in \mathbb{CP}^{p-1}$ esistono almeno k curve paraboliche per F tangenti a $[v]$.*

Per trovare le curve paraboliche citate, utilizzeremo un operatore tra spazi di Banach e restringendoci ad un opportuno sottospazio faremo vedere che è una contrazione.

Nel quinto capitolo, invece, sarà possibile dimostrare che esistono sottovarietà, con l'origine nel bordo, di dimensione strettamente maggiore di 1, che siano F-invarianti e attratte dall'origine. L'esistenza di queste sottovarietà dipenderà dal numero di direttori con parte reale strettamente positiva. Più precisamente saremo interessati a dimostrare che se tutti gli autovalori hanno parte reale strettamente positiva, allora possiamo trovare una dominio attratto dall'origine.

Infine, nell'ultimo capitolo, sono riuscito a dimostrare che l'esistenza di un dominio attrattivo garantisce che tutti gli autovalori abbiano parte reale strettamente positiva. Più precisamente:

Teorema 0.3. *Sia F un germe di $(\mathbb{C}^p, 0)$ in sé tangente all'identità e sia $[v]$ una direzione caratteristica non degenere. Se $[v]$ ammette un bacino d'attrazione Ω, con punti le cui orbite convergono all'origine tangenzialmente a $[v]$, allora tutti i direttori di $[v]$ hanno parte reale strettamente positiva.*

Ringraziamenti

Ci sono molte persone che vorrei ringraziare per avermi accompagnato anche durante questi anni di università, e non provo neppure a nominarle tutte perché certamente ne dimenticherei qualcuna.

Non posso tuttavia non ringraziare il mio relatore, il Prof. Marco Abate, per il suo prezioso aiuto, la disponibilità e per l'infinita pazienza con cui mi ha aiutato durante la stesura di questa tesi. Un ringraziamento va anche a Jasmin Raissy e Matteo Ruggiero, che hanno saputo darmi validi consigli.

Ringraziamenti di altro stampo e calibro vanno alla mia famiglia e ai miei amici, sempre presenti nei momenti più o meno allegri.

Notazioni

Daremo ora qualche notazione che useremo nel seguito della tesi. Lavoreremo con lo spazio m-dimensionale complesso $\mathbb{C}^m$, dotato della norma euclidea

$$\|z\| = \left(\sum_{i=1}^{m} |z_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Con $\mathbb{D}_{r,k}$ indicheremo il seguente sottoinsieme di $\mathbb{C}$

$$\mathbb{D}_{r,k} = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid |z^k - r| < r \right\}.$$

Questo insieme è formato da k componenti connesse, che indicheremo con $\Pi^1_{r,k}, \ldots, \Pi^k_{r,k}$.

Sia $h : \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^m$ una funzione olomorfa. Con $h'(z_0)$ indicheremo la matrice Jacobiana di h in z_0. Inoltre se $\mathbb{C}^m = \mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^q$, allora $\frac{\partial h}{\partial x}$ e $\frac{\partial h}{\partial y}$ saranno le matrici Jacobiane di $h(\cdot, y)$ e $h(x, \cdot)$.

Date $f, g_1, \ldots, g_s : \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^k$, scriveremo

$$f = O\left(g_1, \ldots, g_s\right),$$

se esistono delle costanti $C_1, \ldots, C_s > 0$ tali che

$$\|f(w)\| \leq C_1\|g_1(w)\| + \cdots + C_s\|g_s(w)\|;$$

inoltre con $f = o(g)$ intendiamo che

$$\frac{\|f(w)\|}{\|g(w)\|} \to 0 \text{ quando } w \to 0.$$

Allo stesso modo, data una successione $w_n \in \mathbb{C}^m$, scriveremo

$$w = O\left(\frac{1}{n}\right) \Longleftrightarrow \exists C > 0 \, : \, |w_n| \leq \frac{C}{n};$$
$$w = o\left(\frac{1}{n}\right) \Longleftrightarrow \frac{w_n}{1/n} \to 0 \text{ quando } n \to \infty.$$

Sia $\{x_n\}$ una successione di punti in uno spazio metrico (M, d). Con $x_n\tilde{x}$ intendiamo che, per n abbastanza grande, $d(x_n, x) \to 0$.

Capitolo 1

Preliminari

Questo capitolo è suddiviso in due parti: nella prima parleremo dei sistemi dinamici discreti olomorfi locali, prestando particolare attenzione ai punti fissi parabolici. Nella seconda introdurremo alcuni degli strumenti, presi in prestito dalla geometria algebrica, necessari per lavorare con germi di $(\mathbb{C}^p, 0)$ in sé tangenti all'identità.

1.1 Sistemi dinamici discreti olomorfi locali

Cominciamo con qualche definizione.

Definizione. Sia M una varietà complessa di dimensione n, e $p \in M$. Un **sistema dinamico discreto olomorfo locale** in p è un'applicazione olomorfa $f : U \to M$ tale che $f(p) = p$, dove U è un intorno aperto di p; supporremo sempre che f non sia l'identità di M, in quanto non è dinamicamente interessante. Indicheremo con $\mathrm{End}(M, p)$ l'insieme dei sistemi dinamici discreti olomorfi locali in p dentro M.

Per parlare della dinamica di una $f \in \mathrm{End}(M, p)$ abbiamo bisogno delle iterate di f. È quindi naturale introdurre l'**insieme stabile** K_f di f con

$$K_f = \bigcap_{k=0}^{\infty} f^{-k}(U).$$

L'insieme stabile di f è l'insieme di tutti i punti $z \in U$ per cui l'orbita $\{f^k(z) \mid k \in \mathbb{N}\}$ è ben definita, dove con f^k indichiamo l'iterata k-esima di f.

Senza perdita di generalità supporremo sempre di lavorare in intorni dell'origine in $\mathbb{C}^p$. Inoltre, siccome siamo principalmente interessati al comportamento locale di f vicino a 0, possiamo parlare di germi di funzione e usare questo linguaggio. Quindi con $\mathrm{End}(\mathbb{C}^p, 0)$ indicheremo l'insieme dei germi di funzione olomorfa di $\mathbb{C}^p$ in sé che fissano l'origine.

Un sistema dinamico discreto olomorfo locale in $O \in \mathbb{C}^p$ è dato da un elemento di $\mathbb{C}_0\{z_1, \ldots, z_p\}^p$, lo spazio delle p-uple di serie di potenze convergenti in $z_1, \ldots, z_p$ senza termine costante. Lo spazio $\mathbb{C}_0\{z_1, \ldots, z_p\}^p$ è un sottospazio dello spazio $\mathbb{C}_0[[z_1, \ldots, z_p]]^n$ delle p-uple di serie di potenze formali senza termine costante. Quindi ogni $f \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^p, 0)$ ammette un'unica espansione in serie di polinomi omogenei, della forma

$$f(z) = P_1(z) + P_2(z) + \cdots ,$$

dove $P_j = (P_j^1, \ldots, P_j^n)$ è una p-upla di polinomi omogenei di grado $j \geq 1$, nelle variabili $z_1, \ldots, z_p$. Un elemento $f \in \mathbb{C}_0[[z_1, \ldots, z_p]]^n$ ha un inverso (rispetto alla composizione) che appartiene ancora a $\mathbb{C}_0[[z_1, \ldots, z_p]]^n$ se e solo se il suo termine lineare è un automorfismo lineare di $\mathbb{C}^n$.

Diremo che due sistemi dinamici olomorfi locali $f_1, f_2 \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^p, 0)$ sono **formalmente coniugati** se esiste una $\phi \in \mathbb{C}_0[[z_1, \ldots, z_p]]^n$ invertibile tale che $f_1 = \phi^{-1} \circ f_2 \circ \phi$ è in $\mathbb{C}_0[[z_1, ..., z_p]]^n$. Analogamente si dicono **olomorficamente coniugati** (rispettivamente **topologicamente coniugati**), quando ϕ è in $\mathbb{C}_0\{z_1, \ldots, z_p\}^p$ (rispettivamente in $\mathcal{C}^0$, ovvero l'insieme delle funzioni continue).

Inoltre diremo che un'oggetto è un **invariante formale** (rispettivamente **olomorfo** o **topologico**) se rimane uguale dopo una coniugazione formale (rispettivamente olomorfa o topologica). Un **sistema completo di invarianti** per i sistemi dinamici è un insieme di oggetti che determina univocamente una classe di coniugio di sistemi dinamici.

È chiaro che due sistemi dinamici olomorfi locali che siano olomorficamente localmente coniugati sono anche topologicamente localmente coniugati e formalmente coniugati, mentre il viceversa in generale non è vero.

Definizione. Un germe $f \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^p, 0)$ è **tangente all'identità** se $P_1 = id$. In questo caso scriveremo

$$f(z) = z + P_\mu(z) + P_{\mu+1}(z) + \cdots ,$$

dove $\mu \geq 2$, detto **ordine** di f, è il più piccolo intero $j \geq 2$ tale che $P_j \not\equiv 0$.

1.1.1 Sistemi dinamici locali unidimensionali olomorfi

Prima di mostrare i risultati ottenuti in più variabili, è doveroso introdurre i teoremi in una variabile, per dare un senso alla generalizzazione che verrà trattata in seguito. Cominciamo studiando i sistemi dinamici olomorfi locali in $0 \in \mathbb{C}$.

La teoria in una variabile in una variabile è abbastanza completa, se ci limitiamo a voler studiare il comportamento dei germi nell'intorno dell'origine. Sostanzialmente dipenderà dal differenziale del germe in 0. D'altra parte si è ben lontani dal poter dare una completa classificazione olomorfa di tali germi di funzione.

Come notato nella sezione precedente, un germe $f \in \mathrm{End}(\mathbb{C}, 0)$ è dato da una serie di potenze convergente senza termine costante:

$$f(z) = a_1 z + a_2 z^2 + \cdots \in \mathbb{C}_0\{z\}.$$

Il numero a_1 viene detto **moltiplicatore** ed è un invariante olomorfo e formale. A seconda dei valori di $|a_1|$ cambieranno i comportamenti di f nell'intorno dell'origine. Diamo le seguenti definizioni:

- se $|a_1| \neq 0, 1$ diremo che il punto fisso 0 è **iperbolico**;
- se $|a_1| < 1$ diremo che il punto fisso 0 è **attrattivo**;
- se $a_1 = 0$ diremo che il punto fisso 0 è **superattrattivo**;
- se $|a_1| > 1$ diremo che il punto fisso 0 è **repulsivo**;
- se $a_1 \in S^1$ è una radice dell'unità diremo che il punto fisso 0 è **parabolico**;
- se $a_1 \in S^1$ non è una radice dell'unità diremo che il punto fisso 0 è **ellittico**.

Caso iperbolico e caso superattrattivo

Iniziamo studiando la dinamica nel caso di punto fisso iperbolico. I germi che hanno moltiplicatore a_1 tale che $|a_1| < 1$ o $|a_1| > 1$ sono completamente classificati dal punto di vista olomorfo, formale e topologico. Ad esempio, nel caso in cui $|a_1| < 1$, per ϵ abbastanza piccolo, si dimostra che, se Δ_ϵ è il disco di raggio ϵ centrato in 0, allora Δ_ϵ è l'insieme stabile di $f|_{\Delta_\epsilon}$. Più precisamente vale il seguente teorema.

Teorema 1.1 (Kœnigs, [K]). *Sia $f \in \mathrm{End}(\mathbb{C}, 0)$ un sistema dinamico olomorfo locale unidimensionale con un punto fisso iperbolico nell'origine di moltiplicatore $a_1 \in \mathbb{C}^* \setminus S^1$. Allora:*

(i) f è olomorficamente (e quindi formalmente) coniugato alla sua parte lineare $g(z) = a_1 z$. La coniugazione φ è unicamente determinata dalla condizione $\varphi'(0) = 1$;

(ii) il moltiplicatore è un sistema completo di invarianti per la coniugazione olomorfa locale (o formale) di sistemi dinamici olomorfi locali unidimensionali con un punto fisso iperbolico;

(iii) f è topologicamente localmente coniugato a $g_<(z) = z/2$ se $|a_1| < 1$, e a $g_>(z) = 2z$ se $|a_1| > 1$.

Il caso superattrattivo può venire trattato in modo analogo. Se 0 è un punto fisso superattrattivo per $f \in \mathrm{End}(\mathbb{C}, 0)$, possiamo scrivere

$$f(z) = a_r z^r + a_{r+1} z^{r+1} + \cdots ,$$

con $a_r \neq 0$. L'intero r è detto **ordine** di f in 0. Come nel caso iperbolico, si dimostra che, per ϵ abbastanza piccolo, Δ_ϵ è l'insieme stabile di $f|_{\Delta_\epsilon}$. Inoltre è possibile classificare completamente i sistemi dinamici olomorfi locali con un punto fisso superattrattivo, ottenendo il seguente teorema:

Teorema 1.2 (Böttcher, [Bö])**.** *Sia $f \in \mathrm{End}(\mathbb{C}, 0)$ un sistema dinamico olomorfo locale unidimensionale con un punto fisso superattrattivo di ordine $r \geq 2$ nell'origine. Allora:*

(i) f è olomorficamente localmente (e quindi formalmente) coniugato alla funzione $g(z) = z^r$;

(ii) l'ordine è un sistema completo di invarianti, sia topologico sia olomorfo e formale, per i sistemi dinamici olomorfi locali unidimensionali con un punto fisso superattrattivo.

Caso ellittico

Vediamo ora cosa succede nel caso dei punti fissi ellittici, cioè con $f \in \mathrm{End}(\mathbb{C}, 0)$ della forma

$$f(z) = e^{2\pi i\theta} z + a_2 z^2 + \cdots \in \mathbb{C}_0\{z\}, \tag{1.1}$$

con $\theta \notin \mathbb{Q}$. In questo caso la dinamica dipende principalmente dalle proprietà aritmetiche di θ. Sostanzialmente si dimostra ([Si, Br1, Br2, Br3, Y1, Y2]) che esiste un sottoinsieme $B \subset [0, 1] \setminus \mathbb{Q}$ di misura piena, definito in termini di approssimabilità dei razionali, tale che tutti i sistemi dinamici olomorfi locali della forma (1.1) con $\theta \in B$ sono olomorficamente localmente coniugati alla loro parte lineare, la rotazione irrazionale $z \mapsto e^{2\pi i\theta z}$. Viceversa, il complementare $([0, 1] \setminus \mathbb{Q}) \setminus B$ è un insieme G_δ-denso, tale che se $\theta \in ([0, 1] \setminus \mathbb{Q}) \setminus B$ allora il polinomio quadratico $z \to z^2 + e^{2\pi i\theta z}$ non è olomorficamente linearizzabile. Per quanto riguarda la coniugazione formale vale la seguente proposizione:

Proposizione 1.3. *Se $f \in \mathrm{End}(\mathbb{C}, 0)$ è un sistema dinamico olomorfo locale con moltiplicatore $\lambda = e^{2\pi i\theta} \in S^1$, con $\theta \notin \mathbb{Q}$, allora f è formalmente coniugato alla sua parte lineare.*

Caso parabolico

Per completare lo studio dei sistemi dinamici olomorfi locali unidimensionali ci rimane da affrontare il caso parabolico:

$$f(z) = e^{2\pi i p/q} z + a_{r+1} z^{r+1} + \cdots \,, \tag{1.2}$$

con $a_{r+1} \neq 0$, dove $p/q \in \mathbb{Q} \backslash [0, 1)$ è il **numero di rotazione** di f. Possiamo limitarci a considerare che f sia un germe tangente all'identità, prendendo un'opportuna iterata del germe parabolico. Mentre nel caso iperbolico era sempre possibile coniugare f alla sua parte lineare e, nel caso superattrattivo, al primo termine non nullo nello sviluppo in serie di potenze, nel caso parabolico, invece, questo è in generale impossibile:

Lemma 1.4. *Sia $f \in \mathrm{End}(\mathbb{C}, 0)$ un sistema dinamico olomorfo locale unidimensionale con un punto fisso parabolico di moltiplicatore $\lambda = e^{2\pi i p/q}$ nell'origine. Allora f è olomorficamente (o topologicamente o formalmente) localmente coniugato alla sua parte lineare $g(z) = \lambda z$ se e solo se $f^q \equiv id$.*

Osservazione 1. *Un sistema dinamico locale olomorfo $f \in \mathrm{End}(\mathbb{C}, 0)$ tangente all'identità con molteplicità $k + 1 \geq 2$ non può essere olomorficamente (o topologicamente o formalmente) localmente coniugato all'identità.*

Inoltre un tale sistema dinamico non può avere un insieme stabile che sia un intorno dell'origine. Come si vedrà nel seguito, tale insieme sarà l'unione di r domini che hanno l'origine nel bordo, formando un intorno bucato dell'origine.

Definizione. Sia $f \in \mathrm{End}(\mathbb{C}, 0)$ tangente all'identità con molteplicità $r + 1 \geq 2$. Un vettore $v \in \mathbb{S}^1$ viene detto **direzione attrattiva** (rispettivamente **repulsiva**) per f nell'origine se $a_{r+1} v^r$ è un numero reale negativo (rispettivamente positivo).

Chiaramente ci sono r direzioni attrattive, separate da r direzioni repulsive. A ognuna delle direzioni attrattive è associata una componente connessa del bacino di attrazione $K_f \setminus \{0\}$.

Definizione. Sia $v \in \mathbb{S}^1$ una direzione attrattiva per $f \in \mathrm{End}(\mathbb{C}, 0)$ tangente all'identità. Il **bacino** centrato in v è l'insieme dei punti $z \in K_f \setminus \{0\}$ tale che $f^k(z) \to 0$ e $\frac{f^k(z)}{|f^k(z)|} \to v$. Se z sta nel bacino centrato in v, allora diremo che l'orbita di z **tende** a 0 **lungo** v.

Definizione. Un **petalo attrattivo** per $f \in \mathrm{End}(\mathbb{C}, 0)$ tangente all'identità è un aperto semplicemente connesso f-invariante $P \subset K_f \setminus \{0\}$ tale che un punto $z \in K_f \setminus \{0\}$ appartiene al bacino centrato in v se e solo se la sua orbita interseca P.

Il teorema di Leau-Fatou mostra che le componenti connesse di $K_f \setminus \{0\}$ sono proprio i bacini centrati nelle direzioni attrattive.

Teorema 1.5. *[L] Sia $f \in \mathrm{End}(\mathbb{C}, 0)$ un sistema dinamico locale olomorfo tangente all'identità con molteplicità $r + 1 \geq 2$ nell'origine. Siano v_j^+ e v_j^-, per $j = 1, \ldots, k$, le direzioni repulsive e attrattive di f. Allora:*

(i) per ogni direzione attrattiva (repulsiva) v_j^- esiste un petalo attrattivo (repulsivo) P_j^-, tale che l'unione dei $2k$ petali forma un intorno bucato dell'origine.

(ii) $K_f \setminus \{0\}$ è l'unione disgiunta dei bacini centrati nelle k direzioni attrattive.

(iii) Se B è un bacino centrato in una direzione attrattiva, esiste una funzione olomorfa $\varphi : B \to \mathbb{C}$ tale che $\varphi \circ f(z) = \varphi(z) + 1$ per ogni $z \in B$.

Il Teorema del fiore di Leau-Fatou ci fornisce una descrizione completa della dinamica in un intorno dellorigine. Quasi sessantanni dopo Fatou, Camacho ha inoltre dimostrato che è possibile estrarre da questa dimostrazione la classificazione topologica completa dei sistemi dinamici olomorfi locali unidimensionali tangenti all'identità:

Teorema 1.6 (Camacho [C]; Shcherbakov [S])**.** *Sia $f \in \mathrm{End}(\mathbb{C}, 0)$ un sistema dinamico olomorfo locale unidimensionale tangente all'identità e di molteplicità $r + 1 \geq 2$ nell'origine. Allora f è topologicamente localmente coniugato alla funzione*

$$z \to z - z^{r+1}.$$

In particolare, la molteplicità è un sistema completo di invarianti topologici per i sistemi dinamici olomorfi locali unidimensionali tangenti all'identità.

La classificazione formale si ottiene con un semplice conto, ma è diversa dalla classificazione topologica:

Proposizione 1.7. *Sia $f \in \mathrm{End}(\mathbb{C}, 0)$ un sistema dinamico olomorfo locale unidimensionale tangente all'identità e di molteplicità $r+1 \geq 2$ nell'origine. Allora f è formalmente coniugata alla funzione*

$$g(z) = z - z^{r+1} + \beta z^{2r+1},$$

dove β è un invariante formale (e olomorfo) dato da

$$\beta = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dz}{z - f(z)},$$

e l'integrale è fatto lungo un piccolo ciclo positivo γ attorno all'origine.

Il numero β è detto **indice** di f nel punto fisso. In particolare, quindi, molteplicità e indice formano un sistema completo di invarianti formali per i sistemi dinamici olomorfi discreti unidimensionali tangenti all'identità. La classificazione olomorfa è incredibilmente più complicata: come dimostrato da Voronin and Écalle, dipende da alcuni invarianti funzionali, come l'indice e la molteplicità, definiti in precedenza e l'invariante settoriale, che introduciamo ora.

Sia $f \in \mathrm{End}(\mathbb{C}, 0)$ tangente all'identità con molteplicità $r+1$ nell'origine; a meno di un cambiamento lineare di coordinate possiamo supporre che $a_{r+1} = 1$. Siano $P_1, \ldots, P_{2r}$ dei petali con le proprietà indicate nel Teorema 1.5, ordinati in modo che P_{2r} sia centrato sul semiasse reale positivo, e gli altri seguano ciclicamente in senso antiorario. Indichiamo con F_j il biolomorfismo dato dal Teorema 1.5 (applicato a f^{-1} per i petali repulsivi) che coniuga$f|_{P_j}$ con la traslazione $z \mapsto z+1$ in un semipiano destro (se j è dispari) o sinistro (se j è pari). Se inoltre richiediamo che

$$F_j(z) = 1 + \beta \log z + o(1),$$

dove $\beta \in \mathbb{C}$ è l'indice di f nellorigine, allora F_j è univocamente determinato. Dunque negli insiemi $F_j(P_j \cap P_{j+1})$ possiamo considerare la composizione $\tilde{\Phi}_j = F_{j+1} \circ F_j^{-1}$. Si vede che $\tilde{\Phi}_j(w+1) = \tilde{\Phi}_j(w) + 1$, per $j = 1, \ldots, 2r-1$, e quindi $\psi_j = \tilde{\Phi}_j - id$ è una funzione olomorfa periodica di periodo 1 (per $j = 2r$ dobbiamo però prendere $\psi_{2r} = \tilde{\Phi}_{2r} - id + 2\pi i\beta$ per ottenere una funzione periodica di periodo 1). Ciascuna ψ_j può essere estesa a un opportuno semipiano superiore (se j è dispari) o inferiore (se j è pari). Inoltre, si può dimostrare che le funzioni $\psi_1, \ldots, \psi_{2r}$ sono decrescenti esponenzialmente all'infinito, nel senso che sono limitate in modulo da $\exp(c|w|)$ per $|\mathrm{Im}\, w| \to \infty$, dove $c > 0$ dipende da f.

Ora, se $g = \varphi^{-1} \circ f \circ \varphi$ è coniugata olomorficamente localmente a f , e indichiamo con G_j i corrispondenti biolomorfismi, si può dimostrare che $F_j \circ G_j^{-1} = id + a$, per un opportuno $a \in \mathbb{C}$ indipendente da j. Questo suggerisce di introdurre una relazione d'equivalenza sullinsieme delle $2r$-uple di funzioni del tipo di $(\psi_1, \ldots, \psi_{2r})$. Indichiamo con M_r l'insieme delle $2r$-uple $\psi = (\psi_1, \ldots, \psi_{2r})$ di funzioni olomorfe periodiche di periodo 1, con ψ_j definita su un opportuno semipiano superiore (se j è dispari) o inferiore (se j è pari), e decrescenti esponenzialmente all'infinito. Diremo che $psi, \tilde{\psi} \in M_r$ sono equivalenti se esiste $a \in \mathbb{C}$ tale che $\tilde{\psi}_j = \psi_j \circ (id + a)$, per $j = 1, \ldots, 2r$, e sia $\mathcal{M}_r$ l'insieme quoziente delle classi dequivalenza.

La procedura descritta sopra permette di associare a ogni $f \in \mathrm{End}(\mathbb{C}, 0)$ tangente all'identità con molteplicità $r+1$ un elemento $\mu_f \in \mathcal{M}_r$, detto **invariante settoriale**. La classificazione olomorfa di Ècalle e Voronin allora è:

Teorema 1.8 (Écalle [E1, E2]; Voronin [V])**.** *La molteplicità, l'indice e l'invariante settoriale formano un sistema completo di invarianti olomorfi* *per i sistemi dinamici olomorfi locali unidimensionali tangenti all'identità. Inoltre, per ogni* $r \geq 1, \beta \in \mathbb{C}$ *e* $\mu \in \mathcal{M}_r$ *esiste* $f \in \mathrm{End}(\mathbb{C}, 0)$ *tangente all'identità con molteplicità* $r + 1$*, indice* β *e invariante settoriale* μ*.*

1.2 Blow-up

Nel corso della tesi, sarà necessario analizzare nel dettaglio germi tangenti all'identità negli intorni di alcune direzioni, le direzioni caratteristiche. Lo strumento che è naturale utilizzare in questi casi viene dalla geometria algebrica ed è il blow-up di punti di una varietà. Nel nostro caso basterà un solo scoppiamento nell'origine per semplificare la trasformazione. In generale è possibile fare scoppiamenti consecutivi di punti o scoppiamenti lungo sottovarietà. Qui ci limiteremo a mostrare il blow-up di un punto di una varietà complessa.

Oltre alla tecnica del blow-up, mostreremo anche che, presa una trasformazione tangente all'identità, esiste un suo unico sollevamento alla varietà che otteniamo tramite scoppiamento di un punto.

Se p è un punto in una varietà complessa M, esiste un modo canonico per costruire una varietà complessa $\tilde{M}$, detta **blow-up** di M in p, equipaggiata con una proiezione olomorfa $\pi : \tilde{M} \to M$, tale che $E = \pi^{-1}(p)$, il **divisore eccezionale** del blow-up, sia canonicamente biolomorfo a $\mathbb{P}(T_pM)$, e $\pi|_{\tilde{M}\setminus E} : \tilde{M} \setminus E \to M \setminus \{p\}$ sia un biolomorfismo. In coordinate locali opportune, l'applicazione π è data da

$$\pi(w_1, w_2, \dots, w_n) = (w_1, w_1w_2, \dots, w_1w_n).$$

Inoltre, se $f \in \mathrm{End}(M, p)$ è tangente all'identità, esiste un unico sollevamento $\tilde{f} \in \mathrm{End}(\tilde{M}, E)$ tale che $\pi \circ \tilde{f} = f \circ \pi$, dove $\mathrm{End}(\tilde{M}, E)$ è l'insieme dei germi di applicazioni olomorfe definite in un intorno di E a valori in $\tilde{M}$ e che siano l'identità su E. In particolare, le direzioni caratteristiche di f diventano punti nel dominio di $\tilde{f}$. Usando il blow-up dell'origine possiamo stabilire quali direzioni caratteristiche sono dinamicamente significative.

Per chiarezza di esposizione tratteremo nel dettaglio il blow-up dell'origine in $\mathbb{C}^p$. Sia $\tilde{\mathbb{C}}^n$ il seguente sottoinsieme di $\mathbb{C}^p \times \mathbb{CP}^{n-1}$:

$$\tilde{\mathbb{C}}^n = \{(v, [l]) \in \mathbb{C}^p \times \mathbb{CP}^{n-1} \mid v \in [l]\}.$$

Se prendiamo coordinate $(z_1, \dots, z_p)$ in $\mathbb{C}^p$ e $[S_1 : \dots : S_n]$ in $\mathbb{CP}^{n-1}$ si ha che il sottoinsieme è determinato da

$$z_iS_j = z_jS_i,$$

che esprime il fatto che tutti i rapporti sono uguali. Notiamo inoltre che $\tilde{\mathbb{C}}^n$ è una varietà complessa della stessa dimensione di $\mathbb{C}^p$; infatti possiamo trovare un atlante. Consideriamo i seguenti sottoinisiemi

$$V_i = \{(z_1, \dots, z_p, [S_1 : \dots : S_n]) \in \tilde{\mathbb{C}}^n \mid S_i \neq 0\}$$

e le mappe
$$\phi_i : V_i \to \mathbb{C}^p$$
date da
$$\phi_i(z_1, \dots, z_p, [S_1 : \cdots : 1 : \cdots : S_n]) = (S_1, \dots, z_i, \dots, S_n)\,;$$
si ricorda che, per i punti che stanno in $\{S_i = 1\}$, vale la relazione $z_j = z_i S_j$, per ogni $j = 1, \dots, n$, $j \neq i$.

Le ϕ_i sono olomorfe e invertibili, con inversa continua
$$\phi_i^{-1}(z_1, \dots, z_p) = (z_1 z_i, \dots, z_i, \dots, z_p z_i, [z_1 : \cdots : 1 : \cdots : z_p]) \in V_i.$$
Inoltre per ogni $j, k = 1, \dots, n$, la composizione $\phi_j \circ \phi_k^{-1}$ è un biolomorfismo di $\mathbb{C}^p$. Abbiamo quindi trovato un atlante per $\tilde{\mathbb{C}}^n$, che è l'unione delle carte (V_i, ϕ_i).

Sia $\sigma : \tilde{\mathbb{C}}^n \to \mathbb{C}^p$ l'applicazione data da
$$\sigma(z_1, \dots, z_p, [S_1 : \cdots : S_n]) = (z_1, \dots, z_p).$$
Il sottoinsieme $T := \sigma^{-1}(0)$ viene detto **divisore eccezionale** ed è una sottovarietà complessa compatta di $\tilde{\mathbb{C}}^n$. Notiamo che $\sigma|_{\tilde{\mathbb{C}}^n \setminus T}$ è un biolomorfismo tra $\tilde{\mathbb{C}}^n \setminus T$ e $\mathbb{C}^p \setminus \{0\}$. Inoltre σ nelle carte (V_i, ϕ_i) assume una forma molto semplice
$$\sigma \circ \phi_i^{-1}(z_1, \dots, z_p) = (z_1 z_i, \dots, z_i, \dots, z_p z_i).$$
Il dato della varietà complessa $\tilde{\mathbb{C}}^n$ e della applicazione σ viene detto **blow-up** di $\mathbb{C}^p$ nell'origine.

Rimane da vedere che, data una $F \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^p, 0)$ che sia tangente all'identità, esiste un unico sollevamento $\tilde{F}$ al blow-up $\tilde{\mathbb{C}}^n$. Ogni germe di funzione F in $\mathrm{End}(\mathbb{C}^p, 0)$ ammette un'espansione della forma
$$F(z) = \sum_{i=1}^{\infty} P_i(z),$$
dove $z = (z_1, \dots, z_n)$ e P_i sono polinomi omogenei di grado i nelle variabili $z_1, \dots, z_p$. L'**ordine** $\nu_0(F)$ di F in 0 è
$$\nu_0(F) = \min\{i \mid P_i \text{ non è nullo come polinomio}\}.$$
Inoltre diremo che F è **non degenere** in 0 se $P_{\nu_0}(z) = 0$ se e solo se $z = 0$.

Proposizione 1.9. *Sia $F \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^p, 0)$. Se F è non degenere in 0, allora esiste un'unica $\tilde{F} \in \mathrm{End}(\tilde{\mathbb{C}}^n, \sigma^{-1}(0))$ tale che $F \circ \sigma = \sigma \circ \tilde{F}$. Inoltre $\tilde{F}$ agisce sui punti del divisore eccezionale come il polinomio omogeneo di grado pari all'ordine di F in 0, cioè*
$$\tilde{F}(0, [S]) = (0, [P_{\nu_0}(S)]).$$

Dimostrazione. Per tutti punti che non stanno nel divisore eccezionale, cioè per $(z,[z])$ con $z \neq 0$, possiamo definire $\tilde{F}$

$$\tilde{F}(z,[z]) = (F(z),[F(z)]).$$

Rimane da definire $\tilde{F}$ sul divisore eccezionale. Sia $p = (0,[S])$ un punto in $\sigma^{-1}(0)$ e sia (V_j,ϕ_j) una carta che lo contiene. Per semplicità poniamo che $[S] = [S_1 : \cdots : 1 : \cdots : S_n]$ e $S = (S_1,\ldots,1,\ldots,S_n)$. Allora

$$\begin{aligned}(0,[S_1 : \cdots : 1 : \cdots : S_n]) &= \phi_j^{-1}(S_1,\ldots,0,\ldots,S_n)\\ &= \lim_{\zeta\to 0} \phi_j^{-1}(S_1,\ldots,\zeta,\ldots,S_n)\\ &= \lim_{\zeta\to 0}(S_1\zeta,\ldots,\zeta,\ldots,S_n\zeta,[S_1 : \cdots : 1 : \cdots : S_n]).\end{aligned}$$

Se $\tilde{F}$ esiste, allora deve valere $F\circ\sigma\circ\phi_j^{-1} = \sigma\circ\tilde{F}\circ\phi_j^{-1}$. Di conseguenza definiamo

$$\begin{aligned}\sigma\circ\tilde{F}(0,[S]) &= \lim_{\zeta\to 0}\sigma\circ\tilde{F}\circ\phi_i^{-1}(S_1,\ldots,\zeta,\ldots,S_n)\\ &= \lim_{\zeta\to 0}F\circ\sigma\circ\phi_i^{-1}(S_1,\ldots,\zeta,\ldots,S_n)\\ &= \lim_{\zeta\to 0}F(\zeta S_1,\ldots,\zeta,\ldots,\zeta S_n).\end{aligned}$$

Se prendiamo una qualsiasi successione di punti $\{q_k\}$ in $\mathbb{C}^p\setminus\{0\}$ convergente a 0, allora la successione $\{\sigma^{-1}(q_k) = (q_k,[q_k])\}$ converge in $\tilde{\mathbb{C}}^n$ se e solo se $\{[q_k]\}$ converge in $\mathbb{CP}^{n-1}$. In particolare ne segue che

$$\lim_{k\to\infty}\sigma^{-1}(q_k) = (0,\lim_{k\to\infty}[q_k]).$$

Utilizzando l'espansione in polinomi omogenei di F, si ottiene

$$\begin{aligned}F(\zeta S_1,\ldots,\zeta,\ldots,\zeta S_n) &= \sum_{l\geq\nu_0} P_l(\zeta S_1,\ldots,\zeta,\ldots,\zeta S_n)\\ &= \zeta^{\nu_0}\Big(P_{\nu_0}(S_1,\ldots,1,\ldots,S_n) + \zeta G(\zeta)\Big),\end{aligned}$$

dove G è un'opportuna applicazione olomorfa. Quindi $[F(\zeta S_1,\ldots,\zeta,\ldots,\zeta S_n)] \to [P_{\nu_0}(S)]$ e, quindi, se una tale applicazione $\tilde{F}$ esiste, allora deve valere

$$\tilde{F}(0,[S]) = (0,[P_{\nu_0}(S)]).$$

Per completare la dimostrazione mostreremo che $\tilde{F}$ così definita è olomorfa. In altre parole serve dimostrare che, per ogni scelta di un punto p nel divisore eccezionale, prese due carte (V_h,ϕ_h) e (V_k,ϕ_k) tali che $p\in V_h$ e $\tilde{F}(p)\in V_k$, allora $\phi_k\circ\tilde{F}\circ\phi_h^{-1}$ è una mappa olomorfa. Basta notare che

$$F\circ\underbrace{\sigma\circ\phi_h^{-1}}_{\text{(i)}} = \sigma\circ\tilde{F}\circ\phi_h^{-1} = \underbrace{(\sigma\circ\phi_k^{-1})}_{\text{(ii)}}\circ(\phi_k\circ\tilde{F}\circ\phi_h^{-1})$$

e ricordare l'espressione delle mappe olomorfe (i) e (ii). Quindi, ponendo $G = (g_1, \dots, g_n)$ e $\phi_k \circ \tilde{F} \circ \phi_h^{-1} = (\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_n)$, si ha che

$$G(z_1 z_h, \dots, z_h, \dots, z_p z_h) = (\tilde{f}_1(z)\tilde{f}_k(z), \dots, \tilde{f}_k(z), \dots, \tilde{f}_n(z)\tilde{f}_k(z))$$

e di conseguenza

$$\tilde{f}_i(z) = \begin{cases} g_k(z_1 z_h, \dots, z_h, \dots, z_p z_h), & \text{se } i = k, \\ \dfrac{g_i(z_1 z_h, \dots, z_h, \dots, z_p z_h)}{g_k(z_1 z_h, \dots, z_h, \dots, z_p z_h)}, & \text{se } i \neq k. \end{cases}$$

$\square$

Osservazione 2. *Nel seguito della tesi useremo soltanto germi tangenti all'identità, quindi, siccome hanno tutte ordine pari a* 1*, esisterà sempre un loro sollevamento al blow-up. Inoltre, per la proposizione precedente, sappiamo che il sollevamento agisce come l'identità sul divisore eccezionale.*

Capitolo 2

Direzioni caratteristiche e direttori

Come detto nel precedente capitolo, nel corso della tesi, considereremo soltanto germi di $(\mathbb{C}^p, 0)$ in sé, tangenti all'identità. Inoltre da qui in avanti le mappe saranno di ordine $k+1$, con $k+1 \geq 2$,

$$F(z) = z + P_{k+1}(z) + P_{k+2}(z) + \cdots . \tag{2.1}$$

Definizione. Sia $F \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^p, 0)$ un germe tangente all'identità di ordine $k+1$, come in (2.1). Diremo che $v \neq 0$ in $\mathbb{C}^p$ è una **direzione caratteristica** se verifica $P_{k+1}(v) = \lambda v$, per un qualche $\lambda \in \mathbb{C}$. Inoltre, se $P_{k+1}(v) \neq 0$, diremo che la direzione caratteristica è **non degenere**.

Definizione. Sia $F : (\mathbb{C}^p, 0) \to (\mathbb{C}^p, 0)$ una trasformazione tangente all'identità come in (2.1). Una **traiettoria caratteristica** per F è una qualsiasi orbita $\{X_n\} = \{F^n(X)\}$ di un punto X nel dominio di F, tale che $\{X_n\}$ converge all'origine, tangenzialmente ad una direzione complessa. In altre parole si parla di traiettoria caratteristica tangente a una direzione $v \in \mathbb{C}^p$, $v \neq 0$ se

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} X_n = 0, \\ \lim\limits_{n\to\infty} [X_n] = [v]. \end{cases}$$

La proposizione seguente servirà a legare il concetto di direzione e traiettoria caratteristica. In seguito useremo le coordinate $(x, y) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^{p-1}$ e con $(x_n, y_n) = (f_1^n(x, y), f_2^n(x, y)) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^{p-1}$ indicheremo l'n-esima iterata dell'applicazione F.

Proposizione 2.1. *Se $F : (\mathbb{C}^p, 0) \to (\mathbb{C}^p, 0)$ è un germe tangente all'identità e $\{X_n\}$ è una traiettoria caratteristica tangente a v nell'origine, allora v è una direzione caratteristica. Inoltre, se $P_{k+1}(v) \neq 0$ e le coordinate sono* *state scelte in modo tale che* $v = (1, u_0)$ *e* $P_{k+1}(z) = (p_{k+1}(z), q_{k+1}(z))$*, con* $p_{k+1}(1, u_0) \neq 0$*, allora*

$$x_n^k \sim -\frac{1}{nkp_{k+1}(1, u_0)}, \text{ per } n \to \infty,$$

dove $X_n = (x_n, y_n)$*.*

Dimostrazione. Se $P_{k+1}(v) = 0$, allora v è una direzione caratteristica degenere e non c'è nulla da dimostrare. Quindi si può assumere che $P_{k+1}(v) \neq 0$. Possiamo inoltre supporre di avere scelto le coordinate in $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^{p-1}$ in modo tale che la trasformazione sia della forma

$$\begin{cases} x_1 = x + p_{k+1}(x, y) + p_{k+2}(x, y) + \cdots, \\ y_1 = y + q_{k+1}(x, y) + q_{k+2}(x, y) + \cdots, \end{cases}$$

in cui x_1, x, $p_j(x, y) \in \mathbb{C}$ e y_1, y, $q_j(x, y) \in \mathbb{C}^{p-1}$, e che $v = (1, u_0)$. Siccome $\{X_n\}$ è una traiettoria caratteristica tangente a v sappiamo che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{y_n}{x_n} = u_0.$$

Come spiegato nel capitolo 1.2, possiamo fare un blow-up nell'origine e metterci in un intorno della direzione v. Se $y = ux$ è il blow-up, con $u \in \mathbb{C}^{p-1}$, allora la trasformazione sulla prima coordinata diventa

$$\begin{aligned} x_1 &= x + p_{k+1}(x, ux) + p_{k+2}(x, ux) + \cdots \\ &= x + p_{k+1}(1, u)x^{k+1} + p_{k+2}(1, u)x^{k+2} + \cdots \\ &= x(1 + p_{k+1}(1, u)x^k + p_{k+2}(1, u)x^{k+1} + \cdots), \end{aligned} \tag{2.2}$$

mentre la seconda

$$\begin{aligned} u_1 = \frac{y_1}{x_1} &= \frac{ux + q_{k+1}(x, ux) + q_{k+2}(x, ux) + \cdots}{x + p_{k+1}(1, u)x^{k+1} + p_{k+2}(1, u)x^{k+2} + \cdots} \\ &= \frac{x(u + q_{k+1}(1, u)x^k + q_{k+2}(1, u)x^{k+1} + \cdots)}{x(1 + p_{k+1}(1, u)x^k + p_{k+2}(1, u)x^{k+1} + \cdots)} \\ &= \Big(u + q_{k+1}(1, u)x^k + O(x^{k+1})\Big)\Big(1 - p_{k+1}(1, u)x^k + O(x^{k+1})\Big) \\ &= u + [q_{k+1}(1, u) - p_{k+1}(1, u)u]\, x^k + O(x^{k+1}) \\ &= u + r(u)x^k + O(x^{k+1}), \end{aligned} \tag{2.3}$$

dove $r(u) = q_{k+1}(1, u) - p_{k+1}(1, u)u$. Di fatto, le direzioni caratteristiche non degeneri $(1, u)$, cioè quelle che hanno prima coordinata non nulla, non sono altro che quelle per cui u è zero della mappa polinomiale r.

$$\begin{cases} p_{k+1}(1, u) = \lambda \\ q_{k+1}(1, u) = \lambda u \end{cases} \Longleftrightarrow r(u) = q_{k+1}(1, u) - p_{k+1}(1, u)u = 0.$$

Resta da vedere che, se $u_n = \frac{y_n}{x_n}$ converge a u_0, allora $r(u_0) = 0$. Siccome $u_n \to u_0$, allora la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} (u_{n+1} - u_n)$$

è convergente. Da (2.3), supponendo $r(u_n) \neq 0$, ricaviamo

$$u_{n+1} - u_n = r(u_n)x_n^k + O\left(x_n^{k+1}\right) \sim r(u_0)x_n^k.$$

Per quanto riguarda l'andamento di x_n^k, possiamo dimostrare che converge a 0 come $\frac{1}{n}$. Infatti

$$\frac{1}{x_1} = \frac{1}{x}\left[1 - p_{k+1}(1,u)x^k + O(x^{k+1})\right],$$

e

$$\begin{aligned}\frac{1}{x_1^k} &= \frac{1}{x^k}\left[1 - p_{k+1}(1,u)x^k + O(x^{k+1})\right]^k \\ &= \frac{1}{x^k}\left[1 - kp_{k+1}(1,u)x^k + O\left(x^{k+1}\right)\right] \\ &= \frac{1}{x^k} - kp_{k+1}(1,u) + O\left(x\right).\end{aligned}$$

Sviluppando il termine $\frac{1}{n\,x_n^k}$ abbiamo che

$$\begin{aligned}\frac{1}{nx_n^k} &= \frac{1}{nx_{n-1}^k} - \frac{k}{n}p_{k+1}(1,u_{n-1}) + O\left(\frac{x_{n-1}}{n}\right) \\ &= \frac{1}{nx^k} + \sum_{i=0}^{n-1}\left[-\frac{k}{n}p_{k+1}(1,u_i) + O\left(\frac{x_i}{n}\right)\right] \\ &= \frac{1}{nx^k} - \frac{k}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\left[p_{k+1}(1,u_i) + O\left(x_i\right)\right].\end{aligned}$$

Poniamo $a_j = p_{k+1}(1,u_j) + O(x_j)$. Poiché $a_j \to p_{k+1}(1,u_0)$, allora la media $\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} a_j$ converge allo stesso limite. Ne segue che, per n che va ad infinito, $\frac{1}{nx_n^k}$ converge a $-kp_{k+1}(1,u_0)$ e

$$x_n^k \sim -\frac{1}{nkp_{k+1}(1,u_0)}.$$

Se, per assurdo, $r(u_0)$ fosse diverso da 0, allora

$$u_{n+1} - u_n \sim C\frac{r(u_0)}{n},$$

per una costante $C \neq 0$ e la serie $\sum_{n=0}^{\infty}(u_{n+1} - u_n)$ non sarebbe convergente. E quindi un assurdo. $\square$

Ora facciamo vedere che è possibile eliminare alcuni termini nella prima coordinata di F; più precisamente quelli in x, dall'ordine $k+2$ al $2k$. Dalla (2.2), sviluppando $p_{k+1}(1,u)$ in u_0, otteniamo

$$x_1 = f(x,u) = x + p_{k+1}(1,u_0)x^{k+1} + O\left(\|u\|x^{k+1}, x^{k+2}\right).$$

Usando un argomento simile a quello usato in [B] (Teorema 6.5.7, p.122), cerchiamo dei polinomi per coniugare f con f_h, per $1 \leq h < k$, dove

$$f_h(x,u) = x + p_{k+1}(1,u_0)x^{k+1} + b_h x^{k+h+1} + O\left(\|u\|x^{k+1}, x^{k+h+2}\right),$$

fino a raggiungere

$$f_k(x,u) = x + p_{k+1}(1,u_0)x^{k+1} + O\left(\|u\|x^{k+1}, x^{2k+1}\right).$$

Sia $g(x) = x + \beta x^{h+1}$, con $\beta = \frac{b_h}{(k-h)p_{k+1}(1,u_0)}$. Se applichiamo il seguente cambio di coordinate invertibile $\Phi = (g, id) : (x,u) \mapsto (g(x), u)$ a $F_h = (f_h, \Psi_h)$, allora deve valere $F_{h+1} \circ \Phi = \Phi \circ F_h$, che equivale a

$$\begin{cases} f_{h+1}(g(x),u) = g(f_h(x,u)), \\ \Psi_{h+1}(g(x),u) = \Psi_h(x,u). \end{cases} \tag{2.4}$$

Siccome Φ fissa l'origine e lo sviluppo all'ordine $k+1$ dipende soltanto dal differenziale in 0 di Φ, è chiaro che dev'essere che

$$\begin{cases} f_{h+1}(x,u) = x + \sum_{m=k+1}^{\infty} A_m x^m + O\left(\|u\|x^{k+1}\right), \\ \Psi_{h+1}(x,u) = u + r(u)x^k + O\left(x^{k+1}\right). \end{cases}$$

In particolare notiamo che questi cambi di variabile non influiscono su Ψ all'ordine che stiamo considerando.

Usando la prima equazione in (2.4) e considerando i termini fino all'ordine $k+h+2$ otteniamo

$$\begin{aligned} g(f_h(x,u)) &= x + p_{k+1}(1,u_0)x^{k+1} + b_h x^{k+h+1} + O\left(\|u\|x^{k+1}, x^{k+h+2}\right) \\ &\quad + \beta\left(x + p_{k+1}(1,u_0)x^{k+1} + bx^{k+h+1} + O\left(\|u\|x^{k+1}, x^{k+h+2}\right)\right)^{h+1} \\ &= x + p_{k+1}(1,u_0)x^{k+1} + b_h x^{k+h+1} + \beta(x^{h+1} + (h+1)x^{k+h+1}) \\ &\quad + O\left(\|u\|x^{k+1}, x^{k+h+2}\right), \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} f_{h+1}(g(x),u) &= (x + \beta x^{h+1}) + \sum_{m=k+1}^{\infty} A_m (x + \beta x^{h+1})^m + O\left(\|u\|x^{k+1}\right) \\ &= x + \beta x^{k+1} + A_{k+1}x^{k+1} + \cdots + A_{k+h+1}x^{k+h+1} \\ &\quad + A_{k+1}\beta(k+1)x^{k+h+1} + O\left(x^{k+h+2}, \|u\|x^{k+1}\right). \end{aligned}$$

Quindi i coefficienti A_m devono soddisfare le seguenti uguaglianze

$$\begin{cases} A_{k+1} = p_{k+1}(1,u_0),\ A_{k+2} = 0,\ \ldots,\ A_{k+h} = 0, \\ b_h + (h+1)p_{k+1}(1,u_0)\beta = \beta(k+1)A_{k+1} + A_{k+h+1}, \end{cases}$$

da cui $A_{k+h+1} = 0$. In particolare esiste b_{h+1} tale che

$$f_{h+1}(x,u) = x + p_{k+1}(1,u_0)x^{k+1} + b_{h+1}x^{k+h+2} + O\left(\|u\|x^{k+1}, x^{k+h+3}\right).$$

Procedendo per induzione fino a $h = k-1$, otteniamo una scrittura di f nella forma desiderata, cioè senza termini in x di ordine h, con $k+2 \leq h \leq 2k$, e quindi

$$x_1 = f(x,u) = x + p_{k+1}(1,u_0)x^{k+1} + O\left(\|u\|x^{k+1}, x^{2k+1}\right). \qquad (2.5)$$

Osservazione 3. *Tramite il cambio di coordinate* $x \mapsto X = \sqrt[k]{-p_{k+1}(1,u_0)k}\, x$, *il germe (2.5) sulla prima coordinata passa da*

$$x_1 = x + p_{k+1}(1,u_0)x^{k+1} + O\left(\|u\|x^{k+1}, x^{2k+1}\right).$$

a

$$X_1 = X - \frac{1}{k}X^{k+1} + O\left(\|u\|X^{k+1}, X^{2k+1}\right),$$

mentre sulla seconda, da

$$u_1 = u + r(u) + O(x^{k+1})$$

a

$$U_1 = U - r(U)\frac{X^k}{k\, p_{k+1}(1,u_0)} + O(X^{k+1})$$

Introduciamo ora una classe di matrici $(p-1)\times(p-1)$ che tiene conto di ciò che succede nelle restanti $p-1$ coordinate di F. Se sviluppiamo r in u_0, otteniamo

$$\begin{aligned} u_1 &= u - \frac{1}{k\, p_{k+1}(1,u_0)}x^k\left[r(u_0) + r'(u_0)(u-u_0)\right] + O\left(\|u-u_0\|^2x^k, x^{k+1}\right) \\ &= u - \frac{x^k}{k\, p_{k+1}(1,u_0)}r'(u_0)(u-u_0) + O\left(\|u-u_0\|^2x^k, x^{k+1}\right), \end{aligned}$$

dove $r'(u_0) = \mathrm{Jac}(r)(u_0)$. Alla direzione caratteristica v possiamo associare la classe di coniugio di

$$A(v) = \frac{1}{k\, p_{k+1}(1,u_0)}r'(u_0).$$

Senza perdita di generalità possiamo supporre che $u_0 = 0$; quindi, dopo il blow-up in 0, l'applicazione F è nella seguente forma

$$\begin{cases} x_1 = x - \frac{1}{k}x^{k+1} + O\left(\|u\|x^{k+1}, x^{2k+1}\right), \\ u_1 = (I - x^k A)u + O\left(\|u\|^2 x^k, x^{k+1}\right). \end{cases} \tag{2.6}$$

Possiamo dare un'interpretazione di questa matrice tramite il seguente lemma.

Lemma 2.2. *Sia $v \in \mathbb{C}^p$ una direzione caratteristica non degenere per F con matrice associata $A(v)$. Allora la proiezione $\tilde{P}_{k+1}$ di P_{k+1} sullo spazio proiettivo complesso $\mathbb{CP}^{p-1}$*

$$\tilde{P}_{k+1} : [x] \mapsto [P_{k+1}(x)]$$

è definita in un intorno di v; inoltre $[v]$ è un punto fisso per $\tilde{P}_{k+1}$ e $A(v)$ è la matrice associata all'operatore lineare $\frac{1}{k}\left[d(\tilde{P}_{k+1})_{[v]} - Id\right]$.

Dimostrazione. Sia F un germe nella forma (2.1) di ordine $k+1$ e sia v una direzione caratteristica non degenere. La p-upla di polinomi omogenei P_{k+1} di grado $k+1$ induce un'applicazione meromorfa $\tilde{P}_{k+1}$ di $\mathbb{CP}^{p-1}$ in sé data da

$$\tilde{P}_{k+1}([x]) = [P_{k+1}(x)].$$

Alle direzioni caratteristiche non degeneri di F corrispondono i punti fissi di $\tilde{P}_{k+1}$. Infatti, per definizione di direzione caratteristica, esiste $\lambda \in \mathbb{C}$ tale che $P_{k+1}(v) = \lambda v$. Da cui segue

$$\tilde{P}_{k+1}([v]) = [P_{k+1}(v)] = [v].$$

Inoltre, alle direzioni caratteristiche degeneri corrispondono i punti di indeterminazione.

Possiamo assumere che $v = (1, u_0)$. Allora

$$U = \left\{[x_1 : \cdots : x_p] \in \mathbb{CP}^{p-1} \mid x_1 \neq 0\right\}$$

è un intorno aperto di $[v]$ e $\phi_1 : U \to \mathbb{C}^{p-1}$ definita da

$$[x_1 : \cdots x_p] \mapsto \left(\frac{x_2}{x_1}, \cdots, \frac{x_p}{x_1}\right) = (u_1, \ldots, u_{p-1}),$$

è una carta locale di $\mathbb{CP}^{p-1}$ attorno a $[v]$.

Il differenziale $d(\tilde{P}_{k+1})_{[v]} : T_{[v]}\mathbb{CP}^{p-1} \to T_{[v]}\mathbb{CP}^{p-1}$ è una mappa lineare, sullo spazio tangente $T_{[v]}\mathbb{CP}^{p-1}$, rappresentata dalla matrice Jacobiana, in $u_0 = \phi_1([v])$, dell'applicazione

$$g = \phi_1 \circ \tilde{P}_{k+1} \circ \phi_1^{-1} : \phi_1(U) \to \phi_1(\tilde{P}_{k+1}(U))$$

data da

$$u = (u_1, \ldots, u_{p-1}) \mapsto \left(\frac{q_{k+1,1}(1, u_1, \ldots, u_{p-1})}{p_{k+1}(1, u_1, \ldots, u_{p-1})}, \ldots, \frac{q_{k+1,p-1}(1, u_1, \ldots, u_{p-1})}{p_{k+1}(1, u_1, \ldots, u_{p-1})} \right).$$

Associamo a $[v]$ il seguente endomorfismo lineare

$$\mathcal{A}_F([v]) = \frac{1}{k} \left(d(\tilde{P}_{k+1})_{[v]} - Id \right) : T_{[v]}\mathbb{CP}^{p-1} \to T_{[v]}\mathbb{CP}^{p-1}.$$

Mostriamo che la matrice associata a questo endomorfismo coincide con $A(v)$. Siano $g_1, \ldots, g_{p-1}$ le componenti di g. Siccome $g(u_0) = u_0$, per $i, j = 1, \ldots, p-1$ abbiamo che

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g_i}{\partial u_j}(u_0) &= \frac{\partial}{\partial u_j} \left(\frac{q_{k+1,i}(1, u)}{p_{k+1}(1, u)} \right)(u_0) \\
&= \frac{\frac{\partial q_{k+1,i}}{\partial u_j}(1, u_0)\, p_{k+1}(1, u_o) - q_{k+1,i}(1, u_0) \frac{\partial p_{k+1}}{\partial u_j}(1, u_0)}{p_{k+1}(1, u_0)^2} \\
&= \frac{1}{p_{k+1}(1, u_0)} \left[\frac{\partial q_{k+1,i}}{\partial u_j}(1, u_0) - \frac{\partial p_{k+1}}{\partial u_j}(1, u_0) \frac{q_{k+1,i}}{p_{k+1}}(1, u_0) \right] \\
&= \frac{1}{p_{k+1}(1, u_0)} \left[\frac{\partial q_{k+1,i}}{\partial u_j}(1, u_0) - \frac{\partial p_{k+1}}{\partial u_j}(1, u_0)(u_0)_i \right].
\end{aligned}$$

D'altra parte, da $r_i(u) = q_{k+1,i}(1, u) - p_{k+1}(1, u)u_i$, segue che

$$\frac{\partial r_i}{\partial u_j}(u_0) = \frac{\partial q_{k+1,i}}{\partial u_j}(1, u_0) - \frac{\partial p_{k+1}}{\partial u_j}(1, u_0)(u_0)i - p_{k+1}(1, u_0)\delta_{i,j}.$$

Quindi $A(v) = \frac{1}{k}(g'(u_0) - I)$. $\square$

Lemma 2.3. *Sia $F \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^p, 0)$ e $\phi \in \mathbb{C}^p[[X]]^p$ invertibile. Se $F = P_1 + \sum_{i=k+1}^{\infty} P_i$ e $\phi = Q_1 + \sum_{i=2}^{\infty} Q_i$, allora la parte lineare ed il termine di ordine $k+1$ di $F^* = \phi^{-1} \circ F \circ \phi$ sono rispettivamente*

$$\begin{cases} P_1^* = Q_1^{-1} \circ P_1 \circ Q_1, \\ P_{k+1}^* = Q_1^{-1} \circ [P_{k+1} \circ Q_1 + P_1 \circ Q_{k+1} - Q_{k+1} \circ P_1^*]. \end{cases} \tag{2.7}$$

Dimostrazione. Mi interesso soltanto dei termini fino all'ordine $k+1$:

$$\begin{aligned}
F \circ \phi &= P_1 \circ Q_1 + P_1 \circ Q_2 + \cdots + P_1 \circ Q_{k+1} + P_{k+1} \left(Q_1 + \sum_{j \geq 2} Q_j \right) \\
&\quad + O\left(\|X\|^{k+2} \right) \\
&= P_1 \circ Q_1 + P_1 \circ Q_2 + \cdots + P_1 \circ Q_{k+1} + P_{k+1} \circ Q_1 + O\left(\|X\|^{k+2} \right).
\end{aligned}$$

D'altra parte

$$\phi \circ F^* = Q_1 \circ P_1^* + Q_1 \circ P_{k+1}^* + Q_2 \circ P_1^* + \cdots + Q_{k+1} \circ P_1^* + O\left(\|X\|^{k+2}\right).$$

Siccome $\phi \circ F^* = F \circ \phi$, allora si deve avere che

$$\begin{cases} P_1^* = Q_1^{-1} \circ P_1 \circ Q_1, \\ P_{k+1}^* = Q_1^{-1} \circ [P_{k+1} \circ Q_1 + P_1 \circ Q_{k+1} - Q_{k+1} \circ P_1^*]. \end{cases} \tag{2.8}$$

□

È necessario considerare la classe di coniugio in virtù della seguente proposizione:

Proposizione 2.4. *Se $v = (1, u_0)$ è una direzione caratteristica non degenere, allora la classe di coniugio di $A(v)$ è invariante per cambi di coordinate formali.*

Dimostrazione. Senza perdita di generalità posso supporre che la direzione caratteristica non degenere sia $v = (1, 0)$ e quindi che $r(0) = 0$. Quindi, a meno di un cambio di coordinate lineare,

$$u_1 = u + x^k r'(0)u + O\left(\|u\|^2 x^k, x^{k+1}\right).$$

Se coniughiamo F con un diffeomorfismo ϕ che fissa l'origine, lo sviluppo all'ordine $k+1$ dipenderà soltanto dal differenziale in 0 di ϕ. Infatti, se

$$F = Id + P_{k+1} + \sum_{i=k+2}^{\infty} P_i,$$

e

$$\phi = L + \sum_{i=2}^{\infty} Q_i,$$

allora, per il lemma 2.3

$$F^* = \phi^{-1} \circ F \circ \phi = Id + L^{-1} \circ P_{k+1} \circ L + \cdots.$$

Quindi basterà studiare i cambi di coordinate lineari L. La proiezione di P_{k+1}^* sullo spazio proiettivo complesso $\mathbb{CP}^{p-1}$ è $\tilde{P}_{k+1}^* = \tilde{L}^{-1} \circ \tilde{P}_{k+1} \circ \tilde{L}$, dove $\tilde{L}$ è la trasformazione lineare di $\mathbb{CP}^{p-1}$ indotta da L e $\tilde{P}_{k+1}$ è la proiezione di P_{k+1}. Osserviamo che v^* è una direzione caratteristica per F^* se e solo se $L(v^*)$ lo è per F. Poiché il differenziale di una mappa lineare è la stessa mappa, abbiamo che

$$d(\tilde{P}_{k+1}^*)_{[v^*]} = \tilde{L}^{-1} \circ d(\tilde{P}_{k+1})_{[v]} \circ \tilde{L}.$$

e che

$$A^*([v^*]) \text{``}=\text{''} \frac{1}{k}\left[d(\tilde{P}_{k+1}^*)_{[v^*]} - I\right] = \tilde{L}^{-1} \circ \frac{1}{k}\left(d(\tilde{P}_{k+1})_{[v]} - I\right) \circ \tilde{L} \text{``}=\text{''} \tilde{L}^{-1} A(v) \tilde{L},$$

cioè $A(v)$ e $A^*(v^*)$ stanno nella stessa classe di coniugio. □

Concludiamo che gli autovalori di $A(v)$ sono invarianti olomorfi e formali. Terminiamo il capitolo con la seguente definizione.

Definizione. Gli autovalori della matrice $A(v)$ vengono detti **direttori** di v.

Capitolo 3

Cambi di variabile

Nel precedente capitolo, studiando i germi di $(\mathbb{C}^p, 0)$ in sé tangenti all'identità, siamo riusciti a modificare la forma di una generica F negli intorni di una sua direzione caratteristica, ricalcando quello che viene fatto in una variabile. Abbiamo visto che, tramite il blow-up nell'origine, è possibile considerare il sollevamento al blow-up $\tilde{F}$ al posto di F. Più precisamente, dato il blow-up $\sigma : \tilde{\mathbb{C}}^p \to \mathbb{C}^p$ in 0, abbiamo sostituito F con $\tilde{F}$, che soddisfa $\sigma \circ \tilde{F} = F \circ \sigma$. Il germe $\tilde{F}$ in $\mathrm{End}(\mathbb{C}^p, T)$, nella carta (V_1, ϕ_1) è ancora tangente all'identità.

Per quanto appena detto e dalla (2.6), segue che lo studio dei germi $F : (\mathbb{C}^p, 0) \to (\mathbb{C}^p, 0)$ tangenti all'identità, in un intorno della direzione caratteristica non degenere $v = (1, 0)$, è ridotto allo studio dei germi tangenti all'identità della forma:

$$\begin{cases} x_1 = f(x,u) = x - \frac{1}{k}x^{k+1} + O(\|u\|x^{k+1}, x^{2k+1}), \\ u_1 = \Psi(x,u) = (I - x^k A)u + O(\|u\|^2 x^k, \|u\|x^{k+1}) + x^{k+1}\psi_1(x), \end{cases} \tag{3.1}$$

dove A è la matrice $(p-1) \times (p-1)$ associata alla direzione caratteristica v e ψ_1 è una funzione olomorfa nella sola variabile x. Inoltre, a meno di un cambio di coordinate lineare, si può supporre che A sia già in forma di Jordan.

Un obiettivo della tesi è trovare curve F-invarianti analitiche, tangenti alla direzione $u = 0$, cioè cercare una funzione u di una variabile, analitica in un insieme U che ha l'origine nel bordo, che soddisfi le seguenti condizioni:

$$\begin{cases} u : U \to \mathbb{C}^{p-1}, \\ u(0) = 0,\ u'(0) = 0, \\ u(f(x, u(x))) = \Psi(x, u(x)). \end{cases}$$

Data una tale u, la curva F-invariante è $\varphi(x) = (x, u(x))$.

Visto che consideriamo i germi di $(\mathbb{C}^p, 0)$ in sé tangenti all'identità di ordine $k+1$, ci aspettiamo di trovare k curve per ogni direzione caratteristica.

Diamo delle definizioni più precise.

Definizione. Sia $F : (\mathbb{C}^p, 0) \to (\mathbb{C}^p, 0)$ una trasformazione analitica tangente all'identità. Diremo che un sottoinsieme $M \subset \mathbb{C}^p$ è una **varietà parabolica** di dimensione d nell'origine tangente ad una direzione V se:

(i) esiste un dominio S di $\mathbb{C}^d$, con 0 nel bordo, e un'applicazione iniettiva $\psi : S \to \mathbb{C}^p$ tale che $\psi(S) = M$ e $\lim_{z\to 0} \psi(z) = 0$;

(ii) per ogni successione $\{X_h\} \subset S$ tale che $X_h \to 0$, si ha che $[\psi(X_h)] \to [V]$;

(iii) M è F-invariante e l'orbita di ogni punto $p \in M$ converge a 0.

Inoltre una varietà parabolica di dimensione 1 verrà detta **curva parabolica**.

Cercheremo una funzione $\psi = (id_{\mathbb{C}}, u)$, definita sulle k componenti connesse di $\mathbb{D}_r = \{x \in \mathbb{C} \mid \left|x^k - r\right| < r\}$, a valori in $\mathbb{C}^p$, che verifichi

$$u(f(x, u(x))) = \Psi(x, u(x)).$$

Se r è sufficientemente piccolo otterremo proprio delle curve paraboliche.

Quello che vorremmo fare è trovare una serie formale e poi far vedere che converge almeno in un intorno settoriale dell'origine. L'ostacolo in generale è dato dal fatto che non è possibile dimostrare direttamente la convergenza della serie trovata. Di fatto l'equazione funzionale $u(f(x, u(x))) = \Psi(x, u(x))$ può essere soddisfatta soltanto fino ad un certo ordine.

Quello che ci proponiamo di fare in questo capitolo è di cambiare coordinate in modo tale da semplificare ulteriormente la forma di F. In particolare considereremo cambi di variabile definiti in domini di $\mathbb{C}^p$, che hanno l'origine nel bordo, e che coinvolgono radici e logaritmi di una variabile complessa x. Avranno senso se x appartiene ad un aperto semplicemente connesso che ha $x = 0$ nel bordo; ad esempio il piano complesso tagliato.

Prima di affrontare il caso di generale, è necessario trattare il caso $p = 2$, per capire l'utilità dei cambi di variabile che faremo. Le equazioni di (3.1) nel caso di $p = 2$ sono ridotte a

$$\begin{cases} x_1 = f(x, u) = x - \frac{1}{k}x^{k+1} + O(ux^{k+1}, x^{2k+1}) \\ u_1 = \Psi(x, u) = (1 - x^k\alpha)u + O(u^2x^k, ux^{k+1}) + x^{k+1}\psi_1(x), \end{cases} \tag{3.2}$$

dove $\alpha \in \mathbb{C}$ è il direttore. Dovremo distinguere i casi in cui $k\alpha \in \mathbb{N}$ e $k\alpha \notin \mathbb{N}$.

3.1 Caso $p = 2$

3.1.1 $k\alpha \notin \mathbb{N}^*$

Comincio con il caso più semplice, cioè $k\alpha \notin \mathbb{N}^*$.

Proposizione 3.1. *Sia data* $F = (f, \Psi)$ *nella forma (3.2). Se* $k\alpha \notin \mathbb{N}$, *allora esiste un'unica successione* $\{P_h\}_{h\in\mathbb{N}}$ *di polinomi di grado* h, *tali che*

$$\begin{cases} P_h(0) = 0, \\ \Psi\left(x, P_h(x)\right) = P_h\left(f(x, P_h(x))\right) + x^{h+k+1}\psi_{h+1}(x). \end{cases} \tag{3.3}$$

Inoltre $P_{h+1}(x) = P_h(x) + c_{h+1}x^{h+1}$, *dove* $c_{h+1} = \frac{k\psi_{h+1}(0)}{k\alpha-(h+1)}$.

Dimostrazione. Si procede per induzione su h.
Per $h = 1$ si tratta di cercare un polinomio $P_1 = c_1 x$ che soddisfi (3.3). Ora,

$$\begin{aligned} \Psi(x, P_1(x)) &= P_1(x)\left(1 - \alpha x^k + O(x^k P_1(x), x^{k+1})\right) + x^{k+1}\psi_1(x) \\ &= c_1 x\left(1 - \alpha x^k + O(x^{k+1})\right) + x^{k+1}\psi_1(x) \end{aligned}$$

e

$$P_1\left(f(x, P_1(x))\right) = c_1\left(x - \frac{1}{k}x^{k+1} + O(x^{k+2})\right).$$

Quindi

$$\begin{aligned} &\Psi(x, P_1(x)) - P_1\left(f(x, P_1(x))\right) \\ &\quad = c_1 x - \alpha c_1 x^{k+1} + x^{k+1}\psi_1(0) + O(x^{k+2}) - c_1 x + \frac{c_1}{k}x^{k+1} + O(x^{k+2}) \\ &\quad = c_1 x^{k+1}\left(\frac{1}{k} - \alpha + \frac{\psi_1(0)}{c_1}\right) + O(x^{k+2}). \end{aligned}$$

Affinché non compaiano termini di ordine inferiore a $k+2$, serve che $c_1 = \frac{k\psi_1(0)}{k\alpha-1}$.

Passo induttivo. Assumendo di aver trovato un unico polinomio P_h di grado h tale che sia soddisfatta l'equazione (3.3), cercheremo P_{h+1} di grado $h+1$ che soddisfi

$$\Psi\left(x, P_{h+1}(x)\right) = P_{h+1}\left(f(x, P_{h+1}(x))\right) + x^{h+k+2}\psi_{h+2}(x),$$

dove P_{h+1} può essere scomposto nel seguente modo: $P_{h+1}(x) = p_h(x) + c_{h+1}x^{h+1}$, con p_h polinomio di grado $\leq h$ e $P_h(0) = 0$. In particolare,

$$P_{h+1}\left(f(x, P_{h+1}(x))\right) = \underbrace{p_h\left(f(x, P_{h+1}(x))\right)}_{(i)} + c_{h+1}\underbrace{\left(f(x, P_{h+1}(x))\right)^{h+1}}_{(ii)}.$$

Sia $x_1 = f(x, u) = x - \frac{1}{k}x^{k+1} + x^{k+1}\phi(x, u)$, con $\phi(x, u) \in O\left(x, u\right)$. Sviluppando i termini (i) e (ii) e, sostituendo P_{h+1}, si ottiene che

$$\begin{aligned} (i) &= p_h\left(x - \frac{1}{k}x^{k+1} + x^{k+1}\phi(x, p_h(x) + c_{h+1}x^{h+1})\right) \\ &= p_h\left(x - \frac{1}{k}x^{k+1} + x^{k+1}\phi(x, p_h(x)) + O(x^{k+h+2})\right) \\ &= p_h\left(x - \frac{1}{k}x^{k+1} + x^{k+1}\phi(x, p_h(x))\right) + O(x^{k+h+2}) \\ &= p_h\left(f(x, p_h(x))\right) + O(x^{k+h+2}), \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
(ii) &= \left[x \cdot \left(1 - \frac{1}{k}x^k + x^k\phi(x, P_{h+1}(x))\right)\right]^{h+1} \\
&= x^{h+1}\left[1 - \frac{h+1}{k}(x^k - kx^k\phi(x, P_{h+1}(x))) + O(x^{2k})\right] \\
&= x^{h+1}\left[1 - \frac{h+1}{k}x^k + O(x^{k+1})\right] \\
&= x^{h+1}\left[1 - \frac{h+1}{k}x^k\right] + O(x^{h+k+2}).
\end{aligned}$$

Ne segue che

$$\begin{aligned}
&P_{h+1}\left(f(x, P_{h+1}(x))\right) \\
&\qquad = p_h\left(f(x, p_h(x))\right) + c_{h+1}x^{h+1} - c_{h+1}\frac{h+1}{k}x^{h+k+1} + O(x^{h+k+2}).
\end{aligned}$$

Usando la seconda equazione di (3.2), $u_1 = u[1-\alpha x^k + x^k\varphi(x,u)] + x^{k+1}\psi_1(x)$, con $\varphi(x,u) \in O(x,u)$, otteniamo

$$\begin{aligned}
&\Psi\left(x, P_{h+1}(x)\right) \\
&= \left[p_h(x) + c_{h+1}x^{h+1}\right] \cdot \left[1 - \alpha x^k + x^k\varphi(x, P_{h+1}(x))\right] + x^{k+1}\psi_1(x) \\
&= p_h(x)\left[1 - \alpha x^k + x^k\varphi(x, P_{h+1}(x))\right] + x^{k+1}\psi_1(x) + c_{h+1}x^{h+1} \\
&\quad - \alpha c_{h+1}x^{h+k+1} + O(x^{h+k+2}) \qquad (3.4)\\
&= p_h(x)\left[1 - \alpha x^k + x^k\varphi(x, p_h(x))\right] + x^{k+1}\psi_1(x) + p_h(x)O(x^{h+k+1}) \\
&\quad + c_{h+1}x^{h+1} - \alpha c_{h+1}x^{h+k+1} + O(x^{h+k+2}) \\
&= \Psi\left(f(x, p_h(x))\right) + c_{h+1}x^{h+1} - \alpha c_{h+1}x^{h+k+1} + O(x^{h+k+2}).
\end{aligned}$$

Sottraendo gli elementi appena analizzati si ottiene, a meno di termini di ordine superiore a $h+k+2$ in x, la stessa differenza con p_h al posto del polinomio P_{h+1}.

$$\begin{aligned}
&\Psi\left(x, P_{h+1}(x)\right) - P_{h+1}\left(f(x, P_{h+1}(x))\right) \\
&\quad = \Psi\left(f(x, p_h(x))\right) + c_{h+1}x^{h+1} - \alpha c_{h+1}x^{h+k+1} + O(x^{h+k+2}) \\
&\qquad - p_h\left(f(x, p_h(x))\right) - c_{h+1}x^{h+1} + c_{h+1}\frac{h+1}{k}x^{h+k+1} + O(x^{h+k+2}) \qquad (3.5)\\
&\quad = \Psi\left(f(x, p_h(x))\right) - p_h\left(f(x, p_h(x))\right) + c_{h+1}(\frac{h+1}{k} - \alpha)x^{h+k+1} \\
&\qquad + O(x^{h+k+2}).
\end{aligned}$$

Affinché anche P_{h+1} soddisfi (3.3) serve che

$$\Psi\left(f(x, p_h(x))\right) - p_h\left(f(x, p_h(x))\right) + c_{h+1}x^{h+k+1}\left(\frac{h+1}{k} - \alpha\right)$$

sia $O(x^{h+k+2})$. Ne segue che p_h deve essere soluzione di (3.3), e quindi, per ipotesi induttiva $p_h = P_h$. Sostituendo P_h al posto di p_h in (3.5) e sviluppando ψ_{h+1} in un intorno di 0 si ha che

$$\begin{aligned}&\Psi\left(x, P_{h+1}(x)\right) - P_{h+1}\left(f(x, P_{h+1}(x))\right)\\ &\quad= x^{h+k+1}\left[\psi_{h+1}(0) + c_{h+1}\left(\frac{h+1}{k} - \alpha\right)\right] + O(x^{h+k+2}).\end{aligned}$$

Quindi il coefficiente direttore di P_{h+1} è

$$c_{h+1} = \frac{k\psi_{h+1}(0)}{k\alpha - (h+1)}.$$

□

Tramite un cambio di variabile ora sarà possibile riscrivere le equazioni di F in una forma più comoda, come si vedrà nel seguente corollario.

Corollario 3.2. *Sia $F = (f, \Psi)$ un germe tangente all'identità nella forma (3.2), con $k\alpha \notin \mathbb{N}^*$. Allora per ogni $h \in \mathbb{N}$ esiste un cambio di coordinate tale che la trasformazione sia della seguente forma*

$$\begin{cases} x_1 = \tilde{f}(x,u) = x - \frac{1}{k}x^{k+1} + O(ux^{k+1}, x^{2k+1}), \\ u_1 = \tilde{\Psi}(x,u) = (1-\alpha x^k)u + O(u^2x^k, ux^{k+1}) + x^{h+k}\psi_h(x), \end{cases} \tag{3.6}$$

Dimostrazione. Chiaramente dobbiamo fare un cambio di variabile che interessi soltanto u. Se P_{h-1} è il polinomio di grado $h-1$ trovato nel teorema precedente, mediante il seguente cambio di coordinate

$$\begin{cases} X = x, \\ U = u - P_{h-1}(x), \end{cases}$$

la prima equazione di (3.2) resta la stessa, mentre la seconda si riscrive come

$$\begin{aligned}U_1 &= u_1 - P_{h-1}(x_1) = \Psi(x,u) - P_{h-1}(f(x,u))\\ &= \underbrace{\Psi\left(X, U + P_{h-1}(X)\right)}_{(i)} - \underbrace{P_{h-1}\left(f(X, U + P_{h-1}(X))\right)}_{(ii)},\end{aligned}$$

in cui (i) può essere sviluppato ulteriormente.

$$\begin{aligned}(i) &= [U + P_{h-1}(X)] \cdot \left[1 - \alpha X^k + X^k\phi_2(X, U + P_{h-1}(X))\right] + X^{k+1}\psi_1(X)\\ &= U[1-\alpha X^k] + \Psi(X, P_{h-1}(X)) + O(U^2X^k, UX^{k+1}).\end{aligned}$$

Analogamente a quanto fatto nella precedente dimostrazione, possiamo sviluppare (ii) al primo ordine in U e ottenere

$$\begin{aligned}(ii) &= P_{h-1}\left(X - \frac{1}{k}X^{k+1} + X^{k+1}\phi_1(X, U + P_{h-1}(X))\right)\\ &= P_{h-1}\left(X - \frac{1}{k}X^{k+1} + X^{k+1}\phi_1(X, P_{h-1}(X)) + O(UX^{k+1})\right)\\ &= P_{h-1}\left(f(X, P_{h-1}(X))\right) + O(UX^{k+1}).\end{aligned}$$

Sostituendo (i) e (ii) otteniamo la tesi

$$(i) - (ii) = X^{h+k}\psi_h(X) + U\left(1 - \alpha X^k + O(UX^k, X^{k+1})\right).$$

□

3.1.2 $k\alpha \in \mathbb{N}^*$

Ora verrà affrontato il caso $k\alpha \in \mathbb{N}^*$, $k\alpha \geq 1$.

Proposizione 3.3. *Sia $F = (f, \Psi)$ un germe tangente all'identità nella forma (3.2)*

$$\begin{cases} x_1 = f(x,u) = x - \frac{1}{k}x^{k+1} + O(ux^{k+1}, x^{2k+1}), \\ u_1 = \Psi(x,u) = u\left(1 - \alpha x^k + O(ux^k, x^{k+1})\right) + x^{k+1}\psi_1(x), \end{cases}$$

con $k\alpha \in \mathbb{N}^*$. Allora esiste una successione $\{P_h(x,t)\}_{h\in\mathbb{N}}$ di polinomi in due variabili (x,t) tali che, se $\tilde{u}_h$ sono definite formalmente da

$$\tilde{u}_h(x) := P_h\left(x, x^{k\alpha}\log x\right),$$

allora le $\tilde{u}_h$ hanno grado minore o uguale a h nella variabile x (se consideriamo come costanti i termini $\log x$). Inoltre,

$$\Psi\left(x, \tilde{u}_h(x)\right) - \tilde{u}_h\left(f(x, \tilde{u}_h(x))\right) = x^{h+k+1}\psi_{h+1}(x), \tag{3.7}$$

dove ψ_{h+1} è una funzione che soddisfa le seguenti condizioni

(i) $x^{h+k}\psi_{h+1}$ *è analitica in x e $x^{k\alpha}\log x$;*

(ii) $\psi_{h+1}(x) = R_{h+1}(\log x) + O(x)$*, con R_{h+1} polinomio di grado $p_{h+1} \in \mathbb{N}$, $p_{h+1} \leq h+1$.*

Dimostrazione. La dimostrazione sarà per induzione su h. Se $h < k\alpha$ sono ancora valide le dimostrazioni della proposizione precedente, in quanto i polinomi P_h sono ancora ben definiti. Di conseguenza anche il cambio di variabile $u \mapsto u - P_{k\alpha-1}(x)$ è ben definito; quindi possiamo supporre che la seconda componente di F sia della forma $u_1 = u\left(1 - \alpha x^k + O(ux^k, x^{k+1})\right) + x^{k\alpha+k}\psi_{k\alpha}(x)$.

È chiaro che, per $h < k\alpha$, le funzioni ψ_h sono analitiche in x e quindi soddisfano le condizioni (i) e (ii) della proposizione.

Nel seguito scriveremo F nella seguente forma

$$\begin{cases} x_1 = f(x,u) = x - \frac{1}{k}x^{k+1} + x^{k+1}\phi_1(x,u), \\ u_1 = \Psi(x,u) = u\left(1 - \alpha x^k + x^k\phi_2(x,u)\right) + x^{k\alpha+k}\psi_{k\alpha}(x), \end{cases} \tag{3.8}$$

in cui ϕ_1 e ϕ_2 sono delle funzioni analitiche di ordine almeno 1 nelle coordinate x e u.

Se $h = k\alpha$ basta prendere $P_{k\alpha}(x,t) = ct$, dove $c = -k\psi_{k\alpha}(0)$. Infatti $\tilde{u}_{k\alpha}(x) = cx^{k\alpha}\log x$ verifica la relazione funzionale (3.7) se

$$\begin{aligned}
&\Psi\left(x, \tilde{u}_{k\alpha}(x)\right) - \tilde{u}_{k\alpha}\left(f(x, \tilde{u}_{k\alpha}(x))\right) \\
&\qquad = \underbrace{\tilde{u}_{k\alpha}(x)\left[1 - \alpha x^k + x^k \phi_2(x, \tilde{u}_{k\alpha}(x))\right] + x^{k\alpha+k}\psi_{k\alpha}(x)}_{(i)} \\
&\qquad\quad \underbrace{- \tilde{u}_{k\alpha}\left(x - \frac{1}{k}x^{k+1} + x^{k+1}\phi_1(x, \tilde{u}_{k\alpha}(x))\right)}_{(ii)} \\
&\qquad = O\left(x^{k\alpha+k+1}(\log x)^{p_h}\right),
\end{aligned}$$

per un certo $p_h \in \mathbb{N}$. Saranno utili le seguenti uguaglianze

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial u} = x^{k+1}\frac{\partial \phi_1}{\partial u} = O\left(x^{k+1}\right), \\ \frac{\partial \Psi}{\partial u} = 1 - \alpha x^k + x^k\left(\phi_2(x,u) + u\frac{\partial \phi_2(x,u)}{\partial u}\right) = 1 - \alpha x^k + O\left(x^{k+1}, ux^k\right). \end{cases} \tag{3.9}$$

Abbiamo che

$$(i) = cx^{k\alpha}\log x - \alpha c x^{k\alpha+k}\log x + x^{k\alpha+k}\log x \cdot \phi_2\left(x, x^{k\alpha}\log x\right) + x^{k\alpha+k}\psi_{k\alpha}(x).$$

Sviluppando (ii) si ottiene

$$\begin{aligned}
(ii) &= c\left(x - \frac{1}{k}x^{k+1} + O(x^{k\alpha+k+1}\log x, x^{2k+1})\right)^{k\alpha} \\
&\quad \times \log\left(x - \frac{1}{k}x^{k+1} + O(x^{k\alpha+k+1}\log x, x^{2k+1})\right) \\
&= cx^{k\alpha}\left(1 - \frac{1}{k}x^k + O(x^{k\alpha+k}\log x, x^{2k})\right)^{k\alpha} \\
&\quad \times \left[\log x + \log\left(1 - \frac{1}{k}x^k + O(x^{k\alpha+k}\log x, x^{2k})\right)\right] \\
&= cx^{k\alpha}\left(1 - \alpha x^k + O(x^{k\alpha+k}\log x, x^{2k})\right) \\
&\quad \times \left[\log x - \frac{1}{k}x^k + O(x^{k\alpha+k}\log x, x^{2k})\right] \\
&= cx^{k\alpha}\log x - c\alpha x^{k\alpha+k}\log x - \frac{c}{k}cx^{k\alpha+k} \\
&\quad + O(x^{2k\alpha+k}(\log x)^2, x^{k\alpha+2k}\log x).
\end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned}(i)-(ii) &= \Big[cx^{k\alpha}\log x - c\alpha x^{k\alpha+k}\log x + O(x^{2k\alpha+k}(\log x)^2, x^{k\alpha+k+1}\log x)\\ &\quad +x^{k\alpha+k}\psi_{k\alpha}(x)\Big] - \Big[cx^{k\alpha}\log x - c\alpha x^{k\alpha+k}\log x - \frac{c}{k}cx^{k\alpha+k}\\ &\quad +O(x^{2k\alpha+k}(\log x)^2, x^{k\alpha+2k}\log x)\Big]\\ &= x^{k\alpha+k}\psi_{k\alpha}(0) + \frac{c}{k}x^{k\alpha+k} + O\left(x^{2k\alpha+k}(\log x)^2, x^{k\alpha+k+1}\log x\right)\\ &= x^{k\alpha+k}\psi_{k\alpha}(0) + \frac{c}{k}x^{k\alpha+k} + x^{k\alpha+k+1}O\left(x^{k\alpha-1}(\log x)^2, \log x\right).\end{aligned}$$

Se $c = -k\psi_{k\alpha}(0)$, allora

$$\Psi\left(x, \tilde{u}_{k\alpha}(x)\right) - \tilde{u}_{k\alpha}\left(f(x, \tilde{u}_{k\alpha}(x))\right) = \underbrace{O(x^{k\alpha+k+1}(\log x)^2)}_{x^{k\alpha+k+1}\psi_{k\alpha+1}(x)}.$$

In particolare notiamo che

$$\psi_{k\alpha+1}(x) = R_{k\alpha+1}(\log x) + O(x),$$

dove $R_{k\alpha+1}$ è un polinomio di grado 1 o 2, a seconda che $k\alpha$ sia 1 o no.

Anche in questo caso $\psi_{k\alpha+1}$ soddisfa le condizioni (i) e (ii). Infatti, poiché $k\alpha + k \geq 2$, abbiamo che $x^{k\alpha+k}R_{k\alpha+1}(\log x)$ è analitica in $x^{k\alpha}\log x$ e x.

Rimane da trattare il caso $h > k\alpha$. Per ipotesi induttiva vale la (3.7) con $h-1$ ed esiste un polinomio $R_h(t)$ di grado minore o uguale a h tale che $\psi_h(x) = R_h(\log x) + O(x)$. Cerchiamo $\tilde{u}_h$ della forma

$$\tilde{u}_h(x) = \tilde{u}_{h-1}(x) + x^h Q_h(\log x),$$

dove Q_h è un polinomio. Vogliamo dimostrare che $\tilde{u}_h$, della forma desiderata, soddisfa la relazione (3.7) se e solo se Q_h è l'unica soluzione polinomiale della seguente equazione differenziale

$$(h-\alpha)Q_h(t) - Q_h'(t) = R_h(t).$$

Infatti

$$\begin{aligned}&\Psi\left(x, \tilde{u}_h(x)\right) - \tilde{u}_h\left(f(x, \tilde{u}_h(x))\right)\\ &\qquad = \underbrace{\Psi\left(x, \tilde{u}_{h-1}(x) + x^h Q_h(\log x)\right)}_{(i)}\\ &\qquad\quad - \left[\underbrace{\tilde{u}_{h-1}(f(x, \tilde{u}_h(x)))}_{(ii)} + \underbrace{\left(f(x, \tilde{u}_h(x))\right)^h Q_h(\log(f(x, \tilde{u}_h(x))))}_{(iii)}\right].\end{aligned}$$

Per ipotesi induttiva, nelle funzioni $\tilde{u}_h$ per $h \geq k\alpha$, il termine di grado più basso che compare è $cx^{k\alpha}\log x$. Il termine (i), ottenuto sviluppando e riordinando i termini, si riscrive

$$\begin{aligned}
(i) &= \Psi\left(x, \tilde{u}_{h-1}(x) + x^h Q_h(\log x)\right) \\
&= \Psi(x, \tilde{u}_{h-1}(x)) + \frac{\partial \Psi}{\partial u}(x, \tilde{u}_{h-1}(x)) x^h Q_h(\log x) \\
&\quad + \sum_{n\geq 2} \frac{1}{n!} \frac{\partial^n \Psi}{\partial u^n}(x, \tilde{u}_{h-1}(x)) \left(x^h Q_h(\log x)\right)^n \\
&= \Psi(x, \tilde{u}_{h-1}(x)) + x^h Q_h(\log x) - \alpha x^{k+h} Q_h(\log x) \\
&\quad + O\left(x^{h+k}\tilde{u}_{h-1}(x), x^{h+k+1}\right) + \sum_{n\geq 2} \frac{1}{n!} \frac{\partial^n \Psi}{\partial u^n}(x, \tilde{u}_{h-1}(x)) \left(x^h Q_h(\log x)\right)^n \\
&= \Psi(x, \tilde{u}_{h-1}(x)) + x^h Q_h(\log x) - \alpha x^{k+h} Q_h(\log x) \\
&\quad + O\left(x^{h+k+k\alpha}(\log x)^{\deg Q_h + 1}, x^{h+k+1}(\log x)^{\deg Q_h}\right).
\end{aligned}$$

Analogamente a quanto fatto nella precedente dimostrazione, usando la prima equazione in (3.9), si ha che

$$\begin{aligned}
&f\left(x, \tilde{u}_{h-1}(x) + x^h Q_h(\log x)\right) \\
&\quad = f(x, \tilde{u}_{h-1}(x)) + \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n!} \frac{\partial^n f}{\partial x^n}(f(x, \tilde{u}_{h-1}(x))) \left(x^h Q_h(\log x)\right)^n \\
&\quad = f(x, \tilde{u}_{h-1}(x)) + O\left(x^{h+k+1}(\log x)^{\deg Q_h}\right).
\end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned}
(ii) &= \tilde{u}_{h-1}\left(f(x, \tilde{u}_{h-1}(x)) + O\left(x^{h+k+1}(\log x)^{\deg Q_h}\right)\right) \\
&= \tilde{u}_{h-1}\left(f(x, \tilde{u}_{h-1}(x))\right) + \sum_{n\geq 1} \frac{\partial^n \tilde{u}_{h-1}}{\partial x^n}\left(f(x, \tilde{u}_{h-1})\right) \cdot \left(O\left(x^{h+k+1}(\log x)^{\deg Q_h}\right)\right)^n \\
&= \tilde{u}_{h-1}\left(f(x, \tilde{u}_{h-1}(x))\right) + cx^{k\alpha - 1}(k\alpha \log x + 1) O\left(x^{h+k+1}(\log x)^{\deg Q_h}\right) \\
&= \tilde{u}_{h-1}\left(f(x, \tilde{u}_{h-1}(x))\right) + O\left(x^{h+k+k\alpha}(\log x)^{\deg Q_h + 1}\right).
\end{aligned}$$

Infine, sviluppando in serie di Taylor la potenza h-esima e Q_h in un intorno di $\log x$ e considerando i termini di grado $h+k$ si ottiene

$$
\begin{aligned}
(iii) &= \left[x - \frac{1}{k}x^{k+1} + O(x^{k+1}\tilde{u}_h(x), x^{k+2})\right]^h \\
&\quad \times Q_h\left(\log\left(x - \frac{1}{k}x^{k+1} + O(x^{k+1}\tilde{u}_h(x), x^{k+2})\right)\right) \\
&= x^h\left[1 - \frac{h}{k}x^k + O\left(x^k\tilde{u}_h(x), x^{k+1}\right)\right] \\
&\quad \times Q_h\left(\log x + \log\left(1 - \frac{1}{k}x^k + O\left(\tilde{u}_h(x)x^k, x^{k+1}\right)\right)\right) \\
&= \left[x^h - \frac{h}{k}x^{h+k} + O\left(x^{k+h}\tilde{u}_h(x), x^{k+h+1}\right)\right] \\
&\quad \times Q_h\left(\log x - \frac{1}{k}x^k + O\left(\tilde{u}_h(x)x^k, x^{k+1}\right)\right) \\
&= \left[x^h - \frac{h}{k}x^{h+k} + O\left(x^{k+h}\tilde{u}_h(x), x^{k+h+1}\right)\right] \\
&\quad \times \left[Q_h(\log x) - \frac{1}{k}x^kQ_h'(\log x) + O\left(x^k\tilde{u}_h(x)(\log x)^{\deg Q_h - 1}, x^{k+1}(\log x)^{\deg Q_h - 1}\right)\right] \\
&= x^hQ_h(\log x) - \frac{1}{k}x^{h+k}Q_h'(\log x) - \frac{h}{k}x^{h+k}Q_h(\log x) \\
&\quad + O\left(x^{h+k+k\alpha}(\log x)^{\deg Q_h + 1}, x^{h+k+1}(\log x)^{\deg Q_h}\right).
\end{aligned}
$$

Per ipotesi induttiva

$$
\Psi(x, \tilde{u}_{h-1}(x)) - \tilde{u}_{h-1}(f(x, \tilde{u}_{h-1}(x))) = x^{k+h}\psi_h(x),
$$

con $\psi_h(x) = R_h(\log x) + o(x)$. Riordinando i termini otteniamo che

$$
\begin{aligned}
(i) - (ii) - (iii) &= \Psi\left(x, \tilde{u}_{h-1}(x)\right) + x^hQ_h(\log x) - \alpha x^{h+k}Q_h(\log x) \\
&\quad - \tilde{u}_{h-1}\left(f(x, \tilde{u}_{h-1}(x))\right) - x^hQ_h(\log x) + \frac{1}{k}x^{h+k}Q_h'(\log x) \\
&\quad + \frac{h}{k}x^{h+k}Q_h(\log x) \\
&\quad + O\left(x^{h+k+k\alpha}(\log x)^{\deg Q_h + 1}, x^{h+k+1}(\log x)^{\deg Q_h}\right) \\
&= x^{h+k}\left[R_h(\log x) + \left(\frac{h}{k} - \alpha\right)Q_h(\log x) + \frac{1}{k}Q_h'(\log x)\right] \\
&\quad + O\left(x^{h+k+k\alpha}(\log x)^{\deg Q_h + 1}, x^{h+k+1}(\log x)^{\deg Q_h}\right),
\end{aligned}
\tag{3.10}
$$

dove $R_h(t)$ è il polinomio di grado p_h al più pari ad h. Segue che $\tilde{u}_h$ soddisfa (3.7) se e solo se Q_h è l'unica soluzione di

$$
(k\alpha - h)Q_h(t) - Q_h'(t) = kR_h(t).
$$

Quindi R_{h+1} è un polinomio tale che $\deg R_{h+1} \leq h+1$; l'uguaglianza si può verificare solo nel caso in cui $k\alpha = 1$. Inoltre, se $k\alpha = 1$, il grado di R_{h+1} può aumentare.

Rimangono da verificare sia le condizioni di analiticità su ψ_{h+1}, sia che $\tilde{u}_h$ è un polinomio in x e $x^{k\alpha} \log x$ di grado al più pari a h in x. Poichè Q_h è soluzione dell'equazione differenziale deve essere un polinomio dello stesso grado di R_h. Inoltre, siccome $x^h R_h(\log x)$ è un polinomio in x e $x^{k\alpha} \log x$, allora $p_h \leq \frac{h}{k\alpha}$. Possiamo concludere che $\tilde{u}_h$ è un polinomio in x e $x^{k\alpha} \log x$ di grado inferiore a h. Inoltre, per quanto visto nell'equazione (3.10), $x^{h+k}\psi_{h+1}(x)$ è analitica in x e $x^{k\alpha} \log x$.

La successione dei polinomi è quindi la seguente

$$P_h(x,t) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{h} c_i x^i, c_i = \frac{k\psi_i(0)}{k\alpha-(i+1)} \text{ se } h < k\alpha, \\ \psi_{k\alpha}(0)t \text{ se } h = k\alpha, \\ P_{h-1}(x,t) + x^h Q_h(\log x), \text{ se } h > k\alpha. \end{cases}$$

□

Vale un corollario analogo al caso di $k\alpha \notin \mathbb{N}$.

Corollario 3.4. *Se (f, Ψ) un germe tangente all'identità del tipo (3.2), con $k\alpha \in \mathbb{N}$, allora per ogni $h \in \mathbb{N}$ tale che $h \geq \max\{k, k\alpha\}$, è possibile scegliere delle coordinate locali rispetto alle quali la trasformazione è della seguente forma*

$$\begin{cases} x_1 = \tilde{f}(x,u) = x - \frac{1}{k}x^{k+1} + O(ux^{k+1}, x^{2k+1}\log x), \\ u_1 = \tilde{\Psi}(x,u) = u\left(1 - \alpha x^k + O(ux^k, x^{k+1}\log x)\right) + x^{h+k}\psi_h(x), \end{cases}$$

dove $\tilde{f}$, $\tilde{\Psi}$ e $x^{h+k-1}\psi_h(x)$ sono funzioni analitiche nelle variabili x, $x^{k\alpha}\log x$ e u.

Dimostrazione. Dato h come richiesto, sia $\tilde{u}_{h-1}$ l'applicazione polinomiale in x e $x^{k\alpha}\log x$ della precedente proposizione. Mediante il cambio di coordinate

$$\begin{cases} X = x, \\ U = u - \tilde{u}_{h-1}, \end{cases}$$

la prima equazione diventa

$$\begin{aligned} X_1 &= x - \frac{1}{k}x^{k+1} + O\left(ux^{k+1}, x^{2k+1}\right) \\ &= x - \frac{1}{k}x^{k+1} + O\left((U + \tilde{u}_{h-1}(x))x^{k+1}, x^{2k+1}\right) \\ &= X - \frac{1}{k}X^{k+1} + O\left(UX^{k+1}, X^{2k+1}, X^{k+1+k\alpha}\log X\right) \\ &= X - \frac{1}{k}X^{k+1} + O\left(UX^{k+1}, X^{2k+1}\log X\right) \end{aligned}$$

In particolare il termine $x^{2k+1}\log x$ compare soltanto se $k\alpha = 1$. Invece la seconda diventa

$$
\begin{aligned}
U_1 = u_1 - \tilde{u}_{h-1}(x_1) &= u(1 - \alpha x^k + x^k\phi_2(x,u)) + x^{k+1}\psi_1(x) - \tilde{u}_{h-1}(x_1) \\
&= [U + \tilde{u}_{h-1}(X)]\left[1 - \alpha X^k + X^k\phi_2(X, U + \tilde{u}_{h-1}(X))\right] + X^{k+1}\psi_1(X) \\
&\quad - \tilde{u}_{h-1}(f(x, \tilde{u}_{h-1}(X))) \\
&= \tilde{u}_{h-1}(X)\left[1 - \alpha X^k + X^k\phi_2(X, \tilde{u}_{h-1}(X)) + O\left(X^k U\right)\right] + X^{k+1}\psi_1(X) \\
&\quad + U\left[1 - \alpha X^k + X^k\phi_2(X, U + \tilde{u}_{h-1}(X))\right] - \tilde{u}_{h-1}(f(x, \tilde{u}_{h-1}(X))) \\
&= U\left(1 - \alpha X^k\right) + O\left(UX^{k+1}, U^2X^k, UX^k\tilde{u}_{h-1}(X)\right) \\
&\quad + \Psi(X, \tilde{u}_{h-1}(X)) - \tilde{u}_{h-1}(f(x, \tilde{u}_{h-1}(X))) \\
&= U\left(1 - \alpha X^k\right) + O\left(U^2X^k, UX^{k+1}, UX^{k+k\alpha}\log x\right) + X^{k+h}\psi_h(X) \\
&= U\left(1 - \alpha X^k\right) + O\left(U^2X^k, UX^{k+1}\log x\right) + X^{k+h}\psi_h(X).
\end{aligned}
$$

Analogamente il termine $UX^{k+1}\log x$ compare soltanto se $k\alpha = 1$, altrimenti è UX^{k+1}. □

Osservazione 4. *Chiaramente, nel caso in cui $k\alpha \in \mathbb{N}^*$, tutti i cambi di variabile che abbiamo usato non sono definiti in un intorno dell'origine, ma in un aperto che ha l'origine nel bordo. Questo fatto è dovuto alla presenza dei logaritmi.*

3.2 Caso generale: $p > 2$

Proposizione 3.5. *Sia (f, Ψ) un germe tangente all'identità del tipo (3.1) e siano $\{a_1, \ldots, a_s\}$ i direttori di $[V]$ tali che $ka_j \in \mathbb{N}$. Allora, per ogni $h \in \mathbb{N}$, esiste una funzione $\tilde{u}_{h-1} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^{p-1}$, tale che le sue componenti sono polinomi in x, $x^{ka_1}\log x, \ldots, x^{ka_s}\log x$ di grado inferiore a $h-1$ in x e dopo il cambio di coordinate $u \mapsto u - \tilde{u}_h(x)$, l'applicazione sia della forma seguente*

$$
\begin{cases}
x_1 = \tilde{f}(x, U) = x - \frac{1}{k}x^{k+1} + O(\|U\|x^{k+1}, x^{2k+1}\log x), \\
U_1 = \tilde{\Psi}(x, U) = (I - Ax^k)U + O\left(\|U\|^2x^k, \|U\|x^{k+1}\log x\right) + x^{k+h}\psi_h(x),
\end{cases}
\tag{3.11}
$$

con $\psi_h(x) = R_h(\log x) + O(x)$, dove $R_h(t) = (R_h^1(t), \ldots, R_h^{p-1}(t))$ è un funzione polinomiale tale che $\deg R_h^i = p_h^i \le h$, per ogni $i = 1, \ldots, p-1$.

Dimostrazione. Possiamo supporre che la matrice A sia in forma di Jordan quasi diagonale, in cui gli elementi nella sopradiagonale diversi da 0 sono piccoli rispetto agli autovalori della matrice. Per un fissato h, la j-esima componente di $\tilde{u}_h$ è determinata in ordine decrescente dalle componenti da $p-1$ a $j+1$, ognuna delle quali si ricava con le proposizioni fatte in dimensione 2. Senza perdita di generalità possiamo supporre inoltre che la matrice sia composta da un unico blocco di Jordan di dimensione 1 con autovalore α. Le equazioni per F, con $U = (u, v)$, sono le seguenti

$$\begin{cases} x_1 = f(x,u,v) = x - \frac{1}{k}x^{k+1} + O\left(x^{2k+1}, \|(u,v)\|x^{k+1}\right), \\ u_1 = \Psi^1(x,u,v) = (1 - x^k\alpha)u - x^k\alpha v + O\left(\|(u,v)\|^2 x^k, \|(u,v)\|x^{k+1}\right) + x^{k+1}\psi_1^1(x), \\ v_1 = \Psi^2(x,u,v) = (1 - x^k\alpha)v + O\left(\|(u,v)\|^2 x^k, \|(u,v)\|x^{k+1}\right) + x^{k+1}\psi_1^2(x), \end{cases}$$

dove ψ_1^1 e ψ_1^2 sono funzioni olomorfe e limitate. Procediamo per induzione su h. Se $h = 0$ basta prendere $(\tilde{u}_0, \tilde{v}_0) \equiv 0$. Infatti

$$\begin{cases} \Psi^1(x, \tilde{u}_0, \tilde{v}_0) - \tilde{u}_0\left(f(x, \tilde{u}_0, \tilde{v}_0)\right) = x^{k+1}\psi^1(x), \\ \Psi^2(x, \tilde{u}_0, \tilde{v}_0) - \tilde{v}_0\left(f(x, \tilde{u}_0, \tilde{v}_0)\right) = x^{k+1}\psi^2(x). \end{cases}$$

Per ipotesi induttiva supponiamo che esistano $\tilde{u}_{h-1}$ e $\tilde{v}_{h-1}$ tali che

$$\begin{cases} \Psi^1(x, \tilde{u}_{h-1}, \tilde{v}_{h-1}) - \tilde{u}_{h-1}\left(f(x, \tilde{u}_{h-1}, \tilde{u}_{h-1})\right) = x^{k+h}\psi_h^1(x), \\ \Psi^2(x, \tilde{u}_{h-1}, \tilde{v}_{h-1}) - \tilde{v}_{h-1}\left(f(x, \tilde{u}_{h-1}, \tilde{v}_{h-1})\right) = x^{k+h}\psi_h^2(x). \end{cases} \tag{3.12}$$

Analogamente a quanto fatto nelle dimostrazioni delle precedenti proposizioni, vogliamo trovare dei polinomi Q_h^1 e Q_h^2 tali che

$$\tilde{u}_h(x) = \tilde{u}_{h-1}(x) + Q_h^1(\log x)x^h \text{ e } \tilde{v}_h(x) = \tilde{v}_{h-1}(x) + Q_h^2(\log x)x^h$$

verificano (3.12) con indice h. Dalla Proposizione 3.3 otteniamo che $\tilde{v}_h$ è soluzione se e solo se Q_h^2 verifica

$$(k\alpha - h)Q_h^2(t) - (Q_h^2(t))'(t) = kR_h^2(t).$$

Inoltre $\deg R_h^2 = p_h^2 \leq h$. Per quanto riguarda $\tilde{u}_h$ procederemo analogamente, con l'unica differenza che le equazioni di partenza sono leggermente diverse da quelle usate in precedenza. In particolare ricordiamo che

$$\begin{cases} \frac{\partial \Psi^1}{\partial u}(x,u,v) = 1 - \alpha x^k + O\left(x^{k+1}, \|(u,v)\|x^k\right), \\ \frac{\partial \Psi^1}{\partial v}(x,u,v) = -\alpha x^k + O\left(x^{k+1}, \|(u,v)\|x^k\right). \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \underbrace{\Psi^1(x, \tilde{u}_h, \tilde{v}_h)}_{(i)} &= \Psi^1(x, \tilde{u}_{h-1} + x^h Q_h^1(\log x), \tilde{v}_{h-1} + x^h Q_h^2(\log x)) \\ &= \Psi^1(x, \tilde{u}_{h-1}, \tilde{v}_{h-1}) + (1 - x^k\alpha)x^h Q_h^1(\log x) - x^{k+h}\alpha Q_h^2(\log x) \\ &\quad + O\left(x^{k+h+1}(\log x)^{p_h}, \|(\tilde{u}_{h-1}, \tilde{v}_{h-1})\|x^{k+h}(\log x)^{p_h}\right), \end{aligned}$$

dove $p_h = \max\{\deg Q_h^1, \deg Q_h^2\}$, e

$$\begin{aligned} \tilde{u}_h\left(f(x, \tilde{u}_h, \tilde{v}_h)\right) = &\underbrace{\tilde{u}_{h-1}\left(f(x, \tilde{u}_h, \tilde{v}_h)\right)}_{(ii)} \\ &+ \underbrace{\left[f(x, \tilde{u}_h, \tilde{v}_h)\right]^h Q_h^1\left(\log(f(x, \tilde{u}_h, \tilde{v}_h))\right)}_{(iii)}. \end{aligned}$$

Per quanto riguarda (ii) vale che

$$(ii) = \tilde{u}_{h-1}\left(f(x, \tilde{u}_{h-1}, \tilde{v}_{h-1})\right) + O\left(x^{h+k+1}\log x, \|(\tilde{u}_h, \tilde{v}_h)\| x^{h+k\log x}\right).$$

Inoltre

$$\begin{aligned}
(iii) &= \left[x\left(1 - \frac{1}{k}x^k + O\left(x^{2k}, \|(\tilde{u}_h, \tilde{v}_h)\|x^k\right)\right)\right]^h \\
&\quad \times Q_h^1\left(\log x + \log\left(1 - \frac{1}{k}x^k + O\left(x^{2k}, \|(\tilde{u}_h, \tilde{v}_h)\|x^k\right)\right)\right) \\
&= x^h\left[1 - \frac{h}{k}x^k + O\left(x^{2k}, \|(\tilde{u}_h, \tilde{v}_h)\|x^k\right)\right] \\
&\quad \times Q_h^1\left(\log x - \frac{1}{k}x^k + O\left(x^{2k}, \|(\tilde{u}_h, \tilde{v}_h)\|x^k\right)\right) \\
&= x^h\left[1 - \frac{h}{k}x^k + O\left(x^{2k}, \|(\tilde{u}_h, \tilde{v}_h)\|x^k\right)\right] \\
&\quad \times \Big[Q_h^1(\log x) - \frac{1}{k}x^k(Q_h^1)'(\log x) \\
&\qquad + O\left(x^{2k}(\log x)^{\deg Q_h^1 - 1}, \|(\tilde{u}_h, \tilde{v}_h)\|x^k(\log x)^{\deg Q_h^1 - 1}\right)\Big] \\
&= x^h Q_h^1(\log x) - x^{k+h}\left(\frac{1}{k}(Q_h^1)'(\log x) + \frac{h}{k}Q_h^1(\log x)\right) \\
&\quad + O\left(x^{2k+h}(\log x)^{l_1}, \|(\tilde{u}_h, \tilde{v}_h)\|x^{k+h}(\log x)^{l_2}\right),
\end{aligned}$$

per certi interi l_1 e l_2. Ne segue che

$$\begin{aligned}
(i) - (ii) - (iii) &= \Psi^1(x, \tilde{u}_{h-1}, \tilde{v}_{h-1}) + x^h Q_h^1(\log x) - x^{k+h}\alpha Q_h^1(\log x) \\
&\quad - x^{k+h}\alpha Q_h^2(\log x) - \tilde{u}_{h-1}\left(f(x, \tilde{u}_{h-1}, \tilde{v}_{h-1})\right) \\
&\quad - x^h Q_h^1(\log x) + x^{k+h}\left(\frac{1}{k}(Q_h^1)'(\log x) + \frac{h}{k}Q_h^1(\log x)\right) \\
&\quad + O\left(x^{2k+h}(\log x)^{l_1}, \|(\tilde{u}_h, \tilde{v}_h)\|x^{k+h}(\log x)^{l_2}\right) \\
&= x^{k+h}\Big[\psi_h^1(x) + \frac{1}{k}(Q_h^1)'(\log x) + \frac{h}{k}Q_h^1(\log x) \\
&\qquad - \alpha Q_h^1(\log x) - \alpha Q_h^2(\log x)\Big] \\
&\quad + O\left(x^{2k+h}(\log x)^{l_1}, \|(\tilde{u}_h, \tilde{v}_h)\|x^{k+h}(\log x)^{l_2}\right).
\end{aligned}$$

Quindi $\tilde{u}_h$ e $\tilde{v}_h$ risolvono le equazioni se e solo se Q_h^1 è soluzione di

$$\left[\frac{h}{k} - \alpha\right] Q_h^1(t) + \frac{1}{k}(Q_h^1)'(t) = \alpha Q_h^2(t) - R_h^1(t).$$

Inoltre $\deg R_h^1 = p_h \leq h$. $\square$

Osservazione 5. *Chiaramente visto che nella precedente proposizione la scelta di h è arbitraria, possiamo prendere $h = k\bar{h}$ e avere F nella seguente forma*

$$\begin{cases} x_1 = f(x,u) = x - \frac{1}{k}x^{k+1} + O(\|u\|x^{k+1}, x^{2k+1}\log x) \\ u_1 = \Psi(x,u) = (I - Ax^k)u + O\left(\|u\|^2 x^k, \|u\|x^{k+1}\log x\right) + x^{k(\bar{h}+1)}\psi_h(x), \end{cases}$$

in cui $\psi_h(x) = R_{k\bar{h}}(x) + O\,(x)$. Quindi, a patto di cambiare il grado dei polinomi in $\log x$, per ogni $h \in \mathbb{N}$ possiamo scrivere

$$u_1 = \Psi(x,u) = (I - Ax^k)u + O\left(\|u\|^2 x^k, \|u\|x^{k+1}\log x\right) + x^{k(h+1)}\psi_h(x).$$

Capitolo 4

Esistenza di curve paraboliche

Come detto in precedenza, senza perdita di generalità, si può supporre che $(1,0)$ sia una direzione caratteristica non degenere. Inoltre, per la Proposizione 3.5 e l'Osservazione 5, dopo il blow-up, è possibile fare dei cambi di variabile, definiti in un dominio con l'origine nel bordo, tali che la trasformazione F, nelle coordinate $(x,u) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^{p-1}$, sia della forma

$$\begin{cases} x_1 = f(x,u) = x - \frac{1}{k}x^{k+1} + O(\|u\|x^{k+1}, x^{2k+1}\log x) \\ u_1 = \Psi(x,u) = (I - Ax^k)u + O\left(\|u\|^2 x^k, \|u\|x^{k+1}\log x\right) + x^{k(h+1)}\psi_h(x), \end{cases} \tag{4.1}$$

per un arbitraria scelta di $h \in \mathbb{N}$.

Osservazione 6. *L'esistenza di curve paraboliche $S_1, \ldots, S_k$ tangenti ad una data direzione v in 0 è equivalente a trovare una funzione u definita e analitica sulle k componenti connesse $\Pi_r^1, \ldots, \Pi_r^k$ di $\mathbb{D}_r = \{x \in \mathbb{C} \mid \left|x^k - r\right| < r\}$ tale che*

$$\begin{cases} u(f(x,u(x))) = \Psi(x,u(x)) \\ \lim_{x\to 0} u(x) = \lim_{x\to 0} u'(x) = 0. \end{cases} \tag{4.2}$$

In questo capitolo dimostreremo l'esistenza di tali curve trovando un punto fisso di un opportuno operatore tra spazi di Banach. Per fare ciò sarà necessario trasformare ulteriormente le equazioni su cui lavorare tramite un cambio di variabile analitico sull'insieme $\operatorname{Re}(x^k) > 0$. Siano $(x,w) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^{p-1}$ le nuove coordinate e sia $w \in \mathbb{C}^{p-1}$ definita su $\operatorname{Re}(x^k) > 0$ da

$$u = x^{kA}w = \exp(kA\log x)w.$$

Di conseguenza $u_1 = x_1^{kA}w_1$. Partendo dalle equazioni (4.1) si ottengono le relazioni

$$x_1 - x = -\frac{1}{k}x^{k+1} + O\left(\|u\|x^{k+1}, x^{2k+1}\log x\right)$$

e

$$u_1 - (I - x^k A)u = O\left(\|u\|^2 x^k, \|u\| x^{k+1}\log x, x^{k(h+1)}(\log x)^{p_h}\right), \qquad (4.3)$$

dove p_h è l'intero introdotto nella Proposizione 3.3. Inoltre, usando le proprietà dell'esponenziale di matrice, è possibile riscrivere

$$\begin{aligned}
x_1^{kA} &= \exp(kA\log x_1) = \exp\left(kA\log\left(x\left(1-\frac{1}{k}x^k + O\left(\|u\|x^k, x^{2k}\log x\right)\right)\right)\right)\\
&= \exp\left(kA\left(\log x + \log\left(1-\frac{1}{k}x^k + O\left(\|u\|x^k, x^{2k}\log x\right)\right)\right)\right)\\
&= x^{kA}\left[\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!}(kA)^j\log\left(1-\frac{1}{k}x^k + O\left(\|u\|x^k, x^{2k}\log x\right)\right)^j\right]\\
&= x^{kA}\left[I + kA\log\left(1-\frac{1}{k}x^k + O\left(\|u\|x^k, x^{2k}\log x\right)\right) + O\left(x^{2k}\right)\right]\\
&= x^{kA}\left[I + kA\left(-\frac{1}{k}x^k + O\left(\|u\|x^k, x^{2k}\log x\right)\right)\right]\\
&= x^{kA}\left[\left(I - x^k A\right) + O\left(\|u\|x^k, x^{2k}\log x\right)\right].
\end{aligned} \qquad (4.4)$$

Usando che $x^{kA}w = u$, si vede che $x^{kA}w_1 = x^{kA}x_1^{-kA}x_1^{kA}w_1 = x^{kA}x_1^{-kA}u_1$. Sia

$$H(x,u) := x^{kA}(w - w_1) = u - x^{kA}x_1^{-kA}u_1. \qquad (4.5)$$

Se usiamo la (4.4), notiamo che

$$\begin{aligned}
H(x,u) &= u - \left[(I - x^kA) + O\left(\|u\|x^k, x^{2k\log x}\right)\right]^{-1} u_1\\
&= -\left[(I - x^kA) + O\left(\|u\|x^k, x^{2k\log x}\right)\right]^{-1}\\
&\quad\times\left[u_1 - \left[(I - x^kA) + O\left(\|u\|x^k, x^{2k\log x}\right)\right] u\right]\\
&= -\left[(I - x^kA) + O\left(\|u\|x^k, x^{2k\log x}\right)\right]^{-1}\\
&\quad\times O\left(\|u\|^2x^k, \|u\|x^{k+1}\log x, x^{k(h+1)}(\log x)^{p_h}\right)\\
&= \left(I + O\left(x^k, \|u\|x^k, x^{2k}\log x\right)\right)\\
&\quad\times O\left(\|u\|^2x^k, \|u\|x^{k+1}\log x, x^{k(h+1)}(\log x)^{p_h}\right)\\
&= O\left(\|u\|^2x^k, \|u\|x^{k+1}\log x, x^{k(h+1)}(\log x)^{p_h}\right).
\end{aligned} \qquad (4.6)$$

Quindi la seconda componente di F può essere riscritta come

$$w_1 = w - x^{-kA}H(x,u).$$

Ora possiamo cercare le curve paraboliche tangenti alla direzione V. Al momento imporremo solamente che la funzione u sia almeno di ordine $k+1$.

Lemma 4.1. *Sia f una funzione definita come in (4.1). Per ogni u tale che $u(x) = x^{k+1}h(x)$, per una certa funzione h olomorfa e limitata da Π_r^i in $\mathbb{C}^{p-1}$, siano $\{x_n\}$ le iterate di x tramite la trasformazione in una variabile*

$$x_1 = f_u(x) := f\left(x, u(x)\right).$$

Allora per r abbastanza piccolo, per ogni h che soddisfa $\|h\|_\infty \leq 1$, e per ogni $n \in \mathbb{N}$, $x \in \Pi_r^i$ si ha che $x_n \in \Pi_r^i$, e che

$$|x_n| \leq 2^{1/k} \frac{|x|}{(|1 + nx^k|)^{\frac{1}{k}}}.$$

Dimostrazione. Considerando le ipotesi sulla forma di u si può riscrivere la prima di (4.1) e ottenere

$$x_1 = x - \frac{1}{k}x^{k+1} + ax^{2k+1} + bx^{2k+1}\log x + O\left(x^{2k+2}(\log x)^l, x^{2k+2}\right).$$

Segue dalla proposizione 3.5 che il termine $bx^{2k+1}\log x$ compare soltanto se 1 è un autovalore di kA. Inoltre, se eleviamo alla potenza k-esima, abbiamo che

$$x_1^k = x^k \left[1 - x^k + kax^{2k} + kbx^{2k}\log x + \frac{1}{k^2}\binom{k}{2}x^{2k} + O\left(x^{2k+1}(\log x)^l\right)\right].$$

Invertendo si ottiene che

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x_1^k} &= \frac{1}{x^k\left[1 - x^k + a_1x^{2k} + b_1x^{2k}\log x + O\left(x^{2k+1}(\log x)^l\right)\right]} \\
&= \frac{1}{x^k}\left[1 + x^k - a_1x^{2k} - b_1x^{2k}\log x + x^{2k} + O\left(x^{2k+1}(\log x)^l\right)\right] \\
&= \frac{1}{x^k} + 1 + (1 - a_1)x^k - b_1x^k\log x + O(x^{k+1}(\log x)^l),
\end{aligned}$$

dove $O(x^{k+1}(\log x)^l)$ rappresenta una funzione limitata da $K|x|^{k+1}|\log x|^l$, con K che non dipende da u, poiché $\|h\|_\infty \leq 1$. In vista del prossimo cambio di variabile, è dunque possibile scrivere

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x_1^k} &= \frac{1}{x^k} + 1 + x^k\left(\frac{a}{k} + \frac{2b}{k}\log x\right) + O(x^{k+1}(\log x)^l) \\
&= \frac{1}{x^k}\left(1 + x^k + x^{2k}\left(\frac{a}{k} + \frac{2b}{k}\log x\right) + O(x^{2k+1}(\log x)^l)\right)
\end{aligned} \tag{4.7}$$

per cui valgono le stesse considerazioni fatte in precedenza. Si può definire il seguente cambio di variabile su $\operatorname{Re} x^k > 0$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x^k} + a\log x + b(\log x)^2.$$

Quindi la (4.7) diventa

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z_1} &= \frac{1}{x_1^k} + a \log x_1 + b(\log x_1)^2 \\
&= \frac{1}{x^k} + 1 + x^k \left(\frac{a}{k} + \frac{2b}{k} \log x \right) + a \left(\log x - \frac{1}{k} x^k \right) \\
&\quad + b \left[(\log x)^2 - \frac{2}{k} x^k \log x \right] + O(x^{k+1} (\log x)^l) \\
&= \frac{1}{x^k} + 1 + a \log x + b \, (\log x)^2 + O(x^{k+1} (\log x)^l) \\
&= \frac{1}{z} + 1 + O(x^{k+1} (\log x)^l),
\end{aligned}$$

in cui abbiamo usato le seguenti uguaglianze

$$\begin{aligned}
\log x_1 &= \log x + \log \left(1 - \frac{1}{k} x^k + x^{2k}(a + b \log x) + O(x^{2k+1} (\log x)^l) \right) \\
&= \log x - \frac{1}{k} x^k + O(x^{2k} (\log x)^2)
\end{aligned}$$

e

$$(\log x_1)^2 = (\log x)^2 - \frac{2}{k} x^k \log x + O(x^{2k} (\log x)^2).$$

Calcolando l'n-esima iterata si deduce che

$$\frac{1}{z_n} = \frac{1}{z_{n-1}} + 1 + O(x_{n-1}^k (\log x_{n-1})^l) = \cdots = \frac{1}{z} + n + O(1).$$

D'altra parte

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z_n} &= \frac{1}{x_n^k} + a \log x_n + b \log^2 x_n \\
&= \frac{1}{x_n^k} \left[1 + a x_n^k \log x_n + b x_n^k \log^2 x_n \right]
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z_n} &= \frac{1}{z} + n + O(1) = \frac{1}{x^k} + a \log x + b \log^2 x + n + O(1) \\
&= \frac{1}{x^k} \left[1 + n x^k + a x^k \log x + b x^k \log^2 x + O(x^k) \right] \\
&= \frac{1}{x^k} \left(1 + n x^k \right) \left[1 + \frac{a x^k \log x + b x^k \log^2 x + O(x^k)}{1 + n x^k} \right].
\end{aligned}$$

Per una scelta di r abbastanza piccolo è vero che f_u è una trasformazione attrattiva di Π_r^i in sé, quindi sia $1 + a x_n^k \log x_n + b x_n^k \log^2 x_n$ che $1 + \frac{a x^k \log x + b x^k \log^2 x + O(x^k)}{1 + n x^k}$ sono quantità uniformemente vicine ad 1. In particolare, per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\bar{n}$ tale che, per ogni $n > \bar{n}$

$$\left| a x_n^k \log x_n + b x_n^k \log^2 x_n \right| < \epsilon,$$

e

$$\left|\frac{ax^k \log x + bx^k \log^2 x + O(x^k)}{1+nx^k}\right| < \epsilon.$$

Quindi per $n > \bar{n}$ vale

$$\begin{aligned}
|x_n|^k &= \left|\frac{x^k}{1+nx^k}\right| \left|1 + ax_n^k \log x_n + bx_n^k \log^2 x_n\right| \left|\frac{1}{1+\frac{ax^k \log x + bx^k \log^2 x + O(x^k)}{1+nx^k}}\right| \\
&\leq \left|\frac{x^k}{1+nx^k}\right| \frac{1+\epsilon}{1-\epsilon} \leq 2\frac{|x|^k}{|1+nx^k|},
\end{aligned}$$

in cui l'ultima disuguaglianza vale per r abbastanza piccolo e n sufficientemente grande. Passando alla radice k-esima, otteniamo la conclusione. $\square$

Corollario 4.2. *Siano* $\{x_n\}$ *le iterate del punto* x *tramite la trasformazione* f_u *e* r *abbastanza piccolo. Allora per ogni* $\mu > k$ *(*$\mu \in \mathbb{R}$*) e per ogni* $q \in \mathbb{N}$ *esiste una costante* $C_{\mu,q}$ *tale che, per ogni funzione* u*, del tipo* $u(x) = x^{k+1}h(x)$ *con* $h : \Pi_r^i \to \mathbb{C}^{p-1}$ *olomorfa e limitata e* $\|h\|_\infty \leq 1$*, e per ogni* $x \in \Pi_r^i$*, si ha*

$$\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^\mu |\log x_n|^q \leq C_{\mu,q} |x|^{\mu-k} |\log |x||^q .$$

Dimostrazione. Se $x \in \Pi_r^i$, allora $\operatorname{Re} x^k > 0$; poiché $\left|1+nx^k\right|^2 = 1 + nx^k + n\bar{x}^k + n^2 \left|x^k\right|^2 \underbrace{\geq}_{\operatorname{Re} x^k > 0} 1 + \left|nx^k\right|^2$, la disuguaglianza del lemma precedente diventa

$$|x_n| \leq 2^{1/k} \frac{|x|}{|1+nx|^{\frac{1}{k}}} \leq 2^{1/k} \frac{|x|}{\sqrt[2k]{1+|nx^k|^2}}.$$

Ricordando che, per x sufficientemente piccolo vale $|\log x| \leq K_1 |\log |x||$, per ogni $\mu > k$ e per ogni $q \in \mathbb{N}$ è possibile fare la seguente stima sull'n-esimo termine della serie

$$|x_n|^\mu |\log x_n|^q \leq K_1 |x_n|^\mu |\log |x_n||^q \leq K_2 \frac{|x|^\mu}{\sqrt[2k]{(1+|nx^k|^2)^\mu}} \left|\log \frac{2^{1/k}|x|}{\sqrt[2k]{1+|nx^k|^2}}\right|^q,$$

in cui $K_2 = K_1 2^{\mu/k}$. Infine, stimando la serie con l'integrale, si ha che esiste una costante K tale che

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^\mu |\log x_n|^q \leq K \int_0^\infty \frac{|x|^\mu}{(1+|tx^k|^2)^{\mu/2k}} \left| \log \frac{2^{1/k}|x|}{\sqrt[2k]{1+|tx^k|^2}} \right|^q dt \\
= K|x|^{\mu-k} \int_0^\infty \frac{1}{(1+|tx^k|^2)^{\mu/2k}} \left| \log \frac{2^{1/k}|x|}{\sqrt[2k]{1+|tx^k|^2}} \right|^q |x|^k \, dt \\
\underbrace{=}_{s=t|x|^k} K|x|^{\mu-k} \int_0^\infty \frac{1}{(1+s^2)^{\mu/2k}} \left| \log \frac{2^{1/k}|x|}{\sqrt[2k]{1+s^2}} \right|^q ds.
\end{aligned}$$

Per la disuguaglianza da dimostrare basta sviluppare l'integrando

$$\begin{aligned}
\left| \log \frac{2^{1/k}|x|}{\sqrt[2k]{1+s^2}} \right|^q &\leq \left| \log|x| - \log \frac{\sqrt[2k]{1+s^2}}{2^{1/k}} \right|^q \\
&\leq \left(|\log|x|| + \left| \log \frac{\sqrt[2k]{1+s^2}}{2^{1/k}} \right| \right)^q \\
&= \sum_{j=0}^{q} \binom{q}{j} |\log|x||^{q-j} \left| \log \frac{\sqrt[2k]{1+s^2}}{2^{1/k}} \right|^j \\
&\leq |\log|x||^q \sum_{j=0}^{q} \binom{q}{j} \left| \log \frac{\sqrt[2k]{1+s^2}}{2^{1/k}} \right|^j .
\end{aligned}$$

Allora

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty \frac{1}{(1+s^2)^{\mu/2k}} \left| \log \frac{2^{1/k}|x|}{\sqrt[2k]{1+s^2}} \right|^q ds \\
&\quad \leq |\log|x||^q \sum_{j=0}^{q} \binom{q}{j} \int_0^\infty \left| \log \frac{\sqrt[2k]{1+s^2}}{2^{1/k}} \right|^j \frac{1}{(1+s^2)^{\mu/2k}} ds.
\end{aligned}$$

In conclusione

$$\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^\mu |\log x_n|^q \leq C_{\mu,q} |x|^{\mu-k} |\log|x||^q ,$$

in cui

$$C_{\mu,q} = K \sum_{j=0}^{q} \binom{q}{j} \int_0^\infty \left| \log \frac{\sqrt[2k]{1+s^2}}{2^{1/k}} \right|^j \frac{1}{(1+s^2)^{\mu/2k}} ds$$

è la costante cercata. □

Lemma 4.3. *Sia f una funzione definita come in (4.1). Siano $\{x_n\}$, come nel Lemma 4.1 le iterate di tramite la funzione in una variabile $f(x, u(x))$, per $u(x) = x^{k+1}h(x)$ con $h : \Pi_r^i \to \mathbb{C}^{p-1}$ olomorfa e limitata. Allora, se r è abbastanza piccolo, per ogni funzione h che soddisfa $\|h\|_\infty \leq 1$ e $\|xh'\|_\infty \leq 1$, per ogni $n \in \mathbb{N}$ e per ogni $x \in \bar{\Pi}_r^i$, vale la seguente disuguaglianza*

$$\left|\frac{dx_n}{dx}\right| \leq 2\frac{|x_n|^{k+1}}{|x|^{k+1}}.$$

Dimostrazione. Utilizzando la stessa trasformazione del lemma 4.1 e ricordando che

$$\frac{1}{x_1^k} = \frac{1}{x^k} + 1 + \frac{a}{k}x^k + \frac{2b}{k}x^k \log x + O\left(x^{2k}(\log x)^l, \|u\|\right)$$

si ha

$$\frac{1}{x_1^k} + a \log x_1 + b(\log x_1)^2 = \frac{1}{x^k} + 1 + a \log x + b(\log x)^2 + \phi(x, u), \tag{4.8}$$

dove ϕ è una funzione olomorfa nelle variabili $\{x, u, x^{h_j} \log x\}$ e inoltre

$$\phi(x, u) = O\left(x^{2k}(\log x)^l, \|u\|\right) = O\left(x^{2k}(\log x)^l, x^{k+1}\|h\|\right).$$

Utilizzando l'equazione (4.8) per l'iterata n-esima si deduce che

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{x_n^k} + a \log x_n + b(\log x_n)^2 \\
&\quad = \frac{1}{x_{n-1}^k} + 1 + a \log x_{n-1} + b(\log x_{n-1})^2 + \phi(x_{n-1}, u(x_{n-1})) \\
&\quad = \frac{1}{x^k} + n + a \log x + b(\log x)^2 + \sum_{p=0}^{n-1} \phi(x_p, u(x_p)).
\end{aligned}$$

Derivando rispetto a x entrambi i membri di quest'ultima relazione, si ottiene

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x_n^k} + a \log x_n + b(\log x_n)^2\right) &= \left[-\frac{k}{x_n^{k+1}} + \frac{a}{x_n} + \frac{2b \log x_n}{x_n}\right]\frac{dx_n}{dx} \\
&= -\left[\frac{k - ax_n^k - 2bx_n^k \log x_n}{x_n^{k+1}}\right]\frac{dx_n}{dx}
\end{aligned} \tag{4.9}$$

e

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^k} + n + a \log x + b(\log x)^2 + \sum_{p=0}^{n-1} \phi(x_p, u(x_p))\right) \\
&\quad = -\left[\frac{k - ax^k - 2bx^k \log x}{x^{k+1}}\right] + \sum_{p=0}^{n-1} \frac{d}{dx_p}\left[\phi(x_p, u(x_p))\right]\frac{dx_p}{dx}.
\end{aligned}$$

Per ottenere la disuguaglianza cercata si procederà per induzione su n. Prima di tutto bisogna stimare la somma dei resti $\phi(x_p, u(x_p))$. Per le ipotesi su h e per la forma di ϕ si ha che esiste una costante K tale che

$$\left|\frac{d}{dx}\phi(x,u(x))\right| \leq K\left(|\log|x|| + \|h\| + \|xh'\|\right)|x|.$$

Per $n = 1$ si ha che

$$\begin{aligned}\left|\frac{dx_1}{dx}\right| &= \left|\frac{k - ax^k - 2bx^k\log x + x^{k+1}\frac{d}{dx}\phi(x,u(x))}{k - ax_1^k - 2bx_1^k\log x_1}\cdot\frac{x_1^{k+1}}{x^{k+1}}\right| \\ &\leq D\frac{|x_1|^{k+1}}{|x|^{k+1}},\end{aligned}$$

per una certa costante $D \in \mathbb{R}$. Se $x \ll 1$ possiamo prendere $D = 2$. Supponiamo, per ipotesi induttiva, che per ogni $p < n$ valga $\left|\frac{dx_p}{dx}\right| \leq 2\frac{|x_p|^{k+1}}{|x|^{k+1}}$. Allora per il corollario precedente

$$\begin{aligned}\left|\sum_{p=0}^{n-1}\frac{d}{dx_p}\left[\phi(x_p,u(x_p))\right]\frac{dx_p}{dx}\right| &\leq \sum_{p=0}^{n-1}\left|\frac{d}{dx_p}\left[\phi(x_p,u(x_p))\right]\right|\left|\frac{dx_p}{dx}\right| \\ &\leq K(|\log|x|| + \|h\| + \|xh'\|)\sum_{p=0}^{n-1}\frac{2|x_p|^{k+2}}{|x|^{k+1}} \\ &\leq 2K(1 + \|h\| + \|xh'\|)\sum_{p=0}^{\infty}\frac{|x_p|^{k+2}}{|x|^{k+1}} \\ &\quad + \sum_{p=0}^{\infty}\frac{|x_p|^{k+2}|\log|x_p||}{|x|^{k+1}} \\ &\leq 2K(1 + \|h\| + \|xh'\|)\frac{C_{k+2,0}}{|x|^{k-1}} + \frac{C_{k+2,1}}{|x|^{k-1}} = \frac{K_1}{|x|^{k-1}}.\end{aligned}$$

Dall'equazione (4.9) si ricava

$$\begin{aligned}\left|\frac{dx_n}{dx}\right| &= \left|\frac{k - ax^k - 2bx^k\log x + x^{k+1}\sum_{p=0}^{n-1}\frac{d}{dx_p}\left[\phi(x_p,u(x_p))\right]\frac{dx_p}{dx}}{k - ax_n^k - 2bx_n^k\log x_n}\cdot\frac{x_n^{k+1}}{x^{k+1}}\right| \\ &\leq \frac{\left|k - ax^k - 2bx^k\log x\right| + K_1|x|^2}{|k - ax_n^k - 2bx_n^k\log x_n|}\cdot\frac{|x_n|^{k+1}}{|x|^{k+1}} \\ &\leq 2\frac{|x_n|^{k+1}}{|x|^{k+1}},\end{aligned}$$

se $|x| \ll 1$. □

4.1 Operatore T

Per trovare la curva analitica cercata ci serviremo di un apposito operatore, che agisce sullo spazio delle funzioni u di ordine $k+1$. Abbiamo visto che, data $u(\cdot) = x^{k+1}h(\cdot)$, con $h : \Pi_r^i \to \mathbb{C}^{p-1}$, le iterate $\{x_n\}$ di x, tramite la trasformazione

$$x_1 = f_u(x) := f(x, u(x))$$

sono definite per r abbastanza piccolo. Con questa scelta di u, l'operatore $\mathrm{T}\, u(x) = x^{kA} \sum_{n=0}^{\infty} x_n^{-kA} H(x_n, u(x_n))$ è ben definito, in quanto la serie è normalmente convergente. In questo capitolo ci occuperemo di restringere lo spazio su cui T è definito, con lo scopo di ottenere che sia una contrazione. In particolare cercheremo delle costanti positive r, C_0 e C_1, affinchè T sia ben definito su di un sottospazio chiuso dello spazio di Banach delle funzioni di ordine $k+1$.

Definizione 1. *Siano $h, q \in \mathbb{N}$, con $hk \geq 3$ e $h \geq 1$, e sia $r > 0$. Per ogni $i = 1, \dots, k$, sia $B_{h,q,r}^i$ lo spazio delle funzioni $u : \Pi_r^i \to \mathbb{C}^{p-1}$, che siano della forma $u(\cdot) = x^{kh-1}(\log x)^q t(\cdot)$ con t olomorfa e limitata. La norma $\|u\| = \|t\|_\infty$ rende $B_{h,q,r}^i$ uno spazio di Banach.*

Definizione 2. *Siano r, q, h, C_0 e C_1 delle costanti reali positive e sia $E_{\mathrm{T}}^i(r, C_0, C_1)$ il sottospazio chiuso di $B_{h,q,r}^i$ delle funzioni che soddisfano*

1. $|u(x)| \leq C_0 |x|^{kh-1} |\log |x||^q$, *per ogni* $x \in \Pi_r^i$;
2. $|u'(x)| \leq C_1 |x|^{kh-2} |\log |x||^q$, *per ogni* $x \in \Pi_r^i$.

Definizione 3. *Sia T l'operatore definito da*

$$\mathrm{T}\, u(x) = x^{kA} \sum_{n=0}^{\infty} x_n^{-kA} H(x_n, u(x_n)), \tag{4.10}$$

dove A è la matrice associata alla direzione caratteristica che stiamo studiando, H è presa come in (4.5) e $\{x_n\}$ sono le iterate di x tramite la trasformazione f_u.

Nel resto del capitolo ci occuperemo di dimostrare che T ristretto a $E_{\mathrm{T}}^i(r, C_0, C_1)$ è un operatore continuo ed anche una contrazione. In particolare ammetterà un unico punto fisso u, che si vedrà essere soluzione dell'equazione funzionale (4.2).

Il prossimo lemma fornisce una disuguaglianza molto utile.

Lemma 4.4. *Siano $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{p-1}\}$ gli autovalori della matrice A, e sia $\lambda = \max_j\{\mathrm{Re}\, \alpha_j\}$. Se ϵ è una costante positiva, allora, per ogni $x \in \Pi_r^i$ con r abbastanza piccolo, vale la seguente disuguaglianza*

$$\|x^{-kA}\| \leq |x|^{-k(\lambda+\epsilon)}.$$

Dimostrazione. Senza perdita di generalità si può supporre che la matrice A sia in forma di Jordan del tipo $A = D + N$ che soddisfa

$$D = Diag\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{p-1}\},\ DN = ND,\ N^{p-1} = 0.$$

Quindi, siccome le matrici D ed N commutano, segue che $x^{-kA} = x^{-k(D+N)} = x^{-kD} \exp(-kN \log x)$. Passando alla norma si ottiene la seguente stima

$$\|x^{-kA}\| \leq \|x^{-kD}\| \|\exp(-kN \log x)\| \leq K\, |x|^{-k\lambda} |\log x|^{p-2} \leq |x|^{-k(\lambda+\epsilon)},$$

per $|x|$ abbastanza piccolo. □

Osservazione 7. *È chiaro da (4.9) che se $u \in B^i_{h,q,r}$, allora l'operatore H verifica*

$$H(x, u(x)) = O\left(x^{k(h+1)}(\log x)^{q+1}, x^{k(h+1)}(\log x)^{p_h}\right),$$

di modo che l'operatore mappi $B^i_{h,q,r}$ in sé. Infatti, faremo vedere che

$$(\mathrm{T}\, u)(x) = O\left(x^{kh-1}(\log x)^q\right),$$

per $q \geq p_h$.

Lemma 4.5. *Sia* T *l'operatore appena definito. Sia $\lambda = \max_j\{\mathrm{Re}\,\alpha_j\}$ e h un intero tale che $h > \lambda + \epsilon$. Sia p_h come in (4.6). Allora, per r abbastanza piccolo, esiste una costante C_0 tale che, se u soddisfa la disuguaglianza*

$$\|u(x)\| \leq C_0\, |x|^{hk-1} |\log |x||^{p_h},$$

per ogni $x \in \Pi^i_r$, allora $\mathrm{T}\, u$ soddisfa la stessa disuguaglianza in Π^i_r.

Dimostrazione. Per definizione

$$\mathrm{T}\, u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x_n}{x}\right)^{-kA} H(x_n, u(x_n)).$$

Dall'equazione (4.6) sappiamo che

$$H(x, u) = O\left(\|u\|^2 x^k, \|u\| x^{k+1} \log x, x^{k(h+1)}(\log x)^{p_h}\right).$$

Quindi esistono delle costanti K_1, K_2, K_3 tale che

$$\|H(x, u)\| \leq K_1 \|u\|^2\, |x|^k + K_2 \|u\|\, |x|^{k+1} |\log x| + K_3\, |x|^{k(h+1)} |\log x|^{p_h},$$

in un intorno di 0. Per ipotesi $\|u(x)\| \leq C_0\, |x|^{kh-1} |\log |x||^{p_h}$, da cui segue che

$$\begin{aligned}
\|H(x, u(x))\| &\leq K_1 \|u(x)\|^2\, |x|^k + K_2 \|u(x)\|\, |x|^{k+1} |\log x| + K_3\, |x|^{k(h+1)} |\log x|^{p_h} \\
&\leq C_0^2 K_1\, |x|^{2hk+k-2} |\log |x||^{p_h} + C_0 K_2\, |x|^{k(h+1)} |\log |x||^{p_h+1} \\
&\quad + K_3\, |x|^{k(h+1)} |\log |x||^{p_h} \\
&\leq K\, |x|^{k(h+1)} |\log |x||^{p_h+1},
\end{aligned}$$

con K indipendente da C_0 se r è piccolo, per ogni $x \in \Pi_r^i$. Quindi, per r piccolo, vale

$$\|H(x_n, u(x_n))\| \leq K\,|x_n|^{k(h+1)}\,|\log|x_n||^{p_h+1}\,,$$

per $x \in \Pi_r^i$. Per il Lemma 4.4 vale la seguente disuguaglianza

$$\left\|\left(\frac{x_n}{x}\right)^{-kA}\right\| \leq \left|\frac{x_n}{x}\right|^{-k(\lambda+\epsilon)}.$$

Applicando queste disuguaglianze a $\mathrm{T}\,u(x)$ e usando il Corollario 4.2 si ottiene

$$\begin{aligned}
\|\mathrm{T}\,u(x)\| &= \left\|\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x_n}{x}\right)^{-kA} H(x_n, u(x_n))\right\| \\
&\leq K\sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{x_n}{x}\right|^{-k(\lambda+\epsilon)}|x_n|^{k(h+1)}\,|\log|x_n||^{p_h+1} \\
&\leq K'\,|x|^{kh}\,|\log|x||^{p_h+1} \\
&\leq K''\,|x|^{kh-1}\,|\log|x||^{p_h}\,,
\end{aligned}$$

in cui sfruttiamo il Corollario 4.2, in quanto $h > \lambda + \epsilon$. □

Lemma 4.6. *Sia* T *l'operatore come in (4.10). Siano k, p_h e C_0 come nel lemma 4.5. Allora, per r abbastanza piccolo, esiste una costante C_1 tale che se u' soddisfa la disuguaglianza*

$$\|u'(x)\| \leq C_1\,|x|^{hk-2}\,|\log|x||^{p_h}\,, \tag{4.11}$$

per ogni $x \in \Pi_r^i$, allora $(\mathrm{T}\,u)'$ soddisfa la stessa disuguaglianza in Π_r^i.

Dimostrazione. Scriviamo T nella forma

$$\mathrm{T}\,u(x) = x^{kA}\sum_{n=0}^{\infty}(x_n)^{-kA}\,H(x_n, u(x_n)).$$

Derivando rispetto a x otteniamo una scrittura della seguente forma

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dx}\,\mathrm{T}\,u(x) \\
&\quad= \frac{d}{dx} x^{kA} \left(\sum_{n=0}^{\infty} x_n^{-kA} H(x_n, u(x_n)) \right) + x^{kA} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx} \left[x_n^{-kA} H(x_n, u(x_n)) \right] \\
&\quad= \underbrace{\frac{d}{dx} x^{kA} \left(\sum_{n=0}^{\infty} x_n^{-kA} H(x_n, u(x_n)) \right)}_{S_1} \\
&\qquad \underbrace{+\, x^{kA} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial}{\partial u} \left(x_n^{-kA} H(x_n, u(x_n)) \right) \frac{du}{dx_n} \frac{dx_n}{dx}}_{S_2} \\
&\qquad \underbrace{+\, x^{kA} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x_n} \left(x_n^{-kA} H(x_n, u(x_n)) \right) \frac{dx_n}{dx}}_{S_3}.
\end{aligned}$$

Si tratta quindi di stimare i termini S_1, S_2, S_3. Per quanto riguarda il primo termine, poiché $(d/dx)x^{kA} = kAx^{-1}x^{kA}$

$$S_1 = kAx^{-1}x^{kA} \left(\sum_{n=0}^{\infty} x_n^{-kA} H(x_n, u(x_n)) \right),$$

e quindi con le stesse disuguaglianze usate nella precedente dimostrazione

$$\begin{aligned}
\|S_1\| &= \|kAx^{-1}\| \cdot \left\| \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x_n}{x} \right)^{-kA} H(x_n, u(x_n)) \right\| \\
&\leq \frac{k\|A\|}{|x|} C_0 \, |x|^{kh-1} \, |\log|x||^{p_h} \\
&= D_1 \, |x|^{kh-2} \, |\log|x||^{p_h},
\end{aligned}$$

in cui $D_1 = k\|A\|C_0$. Stimiamo ora il secondo termine

$$S_2 = x^{kA} \sum_{n=0}^{\infty} x_n^{-kA} \frac{\partial H}{\partial u}(x_n, u(x_n)) \frac{du}{dx_n} \frac{dx_n}{dx}.$$

Poiché $kh \geq 3$ siamo nelle ipotesi del lemma 4.3; quindi

$$\left| \frac{dx_n}{dx} \right| \leq 2 \left| \frac{x_n}{x} \right|^{k+1}.$$

Inoltre, siccome $H(x,u) = O\left(\|u\|^2 x^k, \|u\| x^{k+1} \log x, x^{k(h+1)} (\log x)^{p_h}\right)$, esistono delle costanti K_1, K_2 tali che

$$\left\| \frac{\partial}{\partial u} \left(H(x,u) \right) \right\| \leq K_1 \|u\| \, |x|^k + K_2 \, |x|^{k+1} \, |\log|x||,$$

e, per ipotesi esiste una costante C_0 tale che $\|u(x)\| \leq C_0 |x|^{kh-1} |\log|x||^{p_h}$. Quindi

$$\left\| \frac{\partial H}{\partial u}(x, u(x)) \right\| \leq K_1 C_0 |x|^{kh+k-1} |\log|x||^{p_h} + K_2 |x|^{k+1} |\log|x|| \\ \leq C |x|^{k+1} |\log|x|| ,$$

per una certa costante C, indipendente da C_0, poiché $kh > 3$. Sia C_1 tale che $\|u'(x)\| \leq C_1 |x|^{kh-2} |\log|x||^{p_h}$, allora

$$\left\| \frac{\partial H}{\partial u}(x_n, u(x_n)) \frac{du(x_n)}{dx_n} \frac{dx_n}{dx} \right\| = \left\| \frac{\partial H}{\partial u}(x_n, u(x_n)) \right\| \left\| \frac{du(x_n)}{dx_n} \right\| \left| \frac{dx_n}{dx} \right| \\ \leq 2CC_1 |x|^{-(k+1)} |x_n|^{2k+kh} |\log|x_n||^{p_h+1} .$$

Analogamente a quanto visto nella dimostrazione del precedente lemma $\|(\frac{x_n}{x})^{-kA}\| \leq |\frac{x_n}{x}|^{-k(\lambda+\epsilon)}$ e, per il corollario 4.2

$$\begin{aligned} \|S_2\| &\leq \sum_{n=0}^{\infty} \left\| \left(\frac{x_n}{x}\right)^{-kA} \right\| \left\| \frac{\partial H}{\partial u}(x_n, u(x_n)) \frac{du}{dx_n} \frac{dx_n}{dx} \right\| \\ &\leq \sum_{n=0}^{\infty} 2CC_1 \left| \frac{x_n}{x} \right|^{-k(\lambda+\epsilon)} \left| \frac{x_n}{x} \right|^{k+1} |x_n|^{kh+k-1} |\log|x_n||^{p_h+1} \\ &\leq D_2 |x|^{kh-1} |\log|x||^{p_h+1} \\ &\leq D_3 |x|^{kh-2} |\log|x||^{p_h} , \end{aligned}$$

con D_3 indipendente da C_0 e C_1. Rimane da stimare la norma del terzo termine

$$S_3 = x^{kA} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial G}{\partial x}(x_n, u(x_n)) \frac{dx_n}{dx},$$

dove $G(x, u) = x^{-kA} H(x, u)$ e

$$\frac{\partial G}{\partial x} = -\frac{kA}{x} x^{-kA} H(x, u) + x^{-kA} \frac{\partial H}{\partial x}.$$

Con gli stessi conti fatti in precedenza, usando

$$H(x, u) = O\left(\|u\|^2 x^k, \|u\| x^{k+1} \log x, x^{k(h+1)} (\log x)^{p_h} \right)$$

e $\|u(x)\| \leq C_0 |x|^{kh-1} |\log|x||^{p_h}$, si ha che esistono delle costanti K_1, K_2 e K_3 tali che

$$\left\| \frac{\partial H}{\partial x} \right\| \leq K_1 \|u\|^2 |x|^{k-1} + K_2 \|u\| |x|^k |\log x| + K_3 |x|^{k(h+1)-1} |\log|x||^{p_h}$$

e segue che esiste C, dipendente da C_0, tale che

$$\left\| x^{kA} \frac{\partial G}{\partial x}(x, u(x)) \right\| \leq C \left| x \right|^{k(h+1)-1} \left| \log \left| x \right| \right|^{p_h+1}.$$

Usando il Corollario 4.2 otteniamo

$$\begin{aligned} \|S_3\| &\leq \sum_{n=0}^{\infty} \left\| \left(\frac{x_n}{x} \right)^{-kA} \right\| \|h(x_n)\| \left| \frac{dx_n}{dx} \right| \leq \\ &\leq K_4 \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{x_n}{x} \right|^{-k(\lambda+\epsilon)+k+1} \left| x_n \right|^{k(h+1)-1} \left| \log x \right|^{p_h+1} \\ &\leq K_5 \left| x \right|^{kh-1} \left| \log \left| x \right| \right|^{p_h+1} \\ &\leq D_4 \left| x \right|^{kh-2} \left| \log \left| x \right| \right|^{p_h}, \end{aligned}$$

con D_4 indipendente da C_0. Quindi tale che

$$\left\| \frac{d}{dx} \operatorname{T} u(x) \right\| \leq \|S_1\| + \|S_2\| + \|S_3\| \leq (D_1 + D_3 + D_4) \left| x \right|^{kh-2} \left| \log \left| x \right| \right|^{p_h}.$$

Prendendo $C_1 = D_1 + D_3 + D_4$ abbiamo dimostrato il lemma. □

Osservazione 8. *I due lemmi precedenti sono serviti per dimostrare che* T *manda* $E^i_{\mathrm{T}}(r, C_0, C_1)$ *in sé.*

Rimane da mostrare che T è una contrazione. Prima di fare questo servirà dimostrare il seguente lemma

Lemma 4.7. *Siano* $u(\cdot) = x^{kh-1}(\log x)^{p_h} h_1(\cdot)$ *e* $v(\cdot) = x^{kh-1}(\log x)^{p_h} h_2(\cdot)$ *due funzioni in* $E^i_{\mathrm{T}}(r, C_0, C_1)$ *e siano* $\{x_n\}$ *e* $\{x'_n\}$ *le iterate di* x *tramite* f_u *e* f_v*. Allora esiste una costante* K *tale che, per ogni* n*,*

$$\left| x'_n - x_n \right| \leq K \left| x \right|^{kh} \left| \log \left| x \right| \right|^{p_h} \|h_2 - h_1\|_\infty.$$

Dimostrazione. Siano x e x' in Π^i_r. Stimiamo la variazione

$$f_v(x') - f_u(x) = f(x', v(x')) - f(x, u(x)).$$

Dall'equazione (4.1) sappiamo che esistono delle costanti a, b, c e una funzione $m(x, u)$ tali che

$$\begin{cases} f_v(x') = x' - \frac{1}{k}(x')^{k+1} + (x')^{2k+1}(a + b \log x') + c(x')^{k+1} v(x') + m(x', v), \\ f_u(x) = x - \frac{1}{k} x^{k+1} + x^{2k+1}(a + b \log x) + c x^{k+1} u(x) + m(x, u). \end{cases}$$

Quindi otteniamo

$$\begin{aligned} f_v(x') - f_u(x) = (x' - x) &\left[1 + \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k} (x')^i x^{k-i} + O\left(\left| (x'') \right|^{2k} \left| \log \left| x \right|'' \right| \right) \right] \\ &+ (v(x') - u(x)) O\left(\left| x'' \right|^{k+1} \right), \end{aligned} \tag{4.12}$$

dove $x'' = \max\{|x'|\,,\,|x|\}$. Segue dal Lemma 4.1 che, quando n va ad infinito, $x_n^k \sim (x_n')^k \sim \frac{1}{n}$, quindi nelle stime si può sostituire $|x|^k$ al posto di $|x''|^k$. Inoltre stimando la variazione di v tra due punti x e x',

$$\begin{aligned} v(x') &= v(x) + \frac{dv}{dx}(x)(x'-x) + O\left(\left|x'-x\right|^2\right) \\ &= v(x) + \Big[(kh-1)x^{kh-2}(\log x)^{p_h}h_2(x) + p_h x^{kh-2}(\log x)^{p_h-1}h_2(x) \\ &\qquad\qquad + x^{kh-1}(\log x)^{p_h}\frac{dh_2}{dx}(x)\Big]\,(x'-x) + O\left(\left|x'-x\right|^2\right) \\ &= v(x) + O\left(x^{kh-2}(\log x)^{p_h}\right)(x'-x), \end{aligned} \tag{4.13}$$

e aggiungendo e sottraendo la quantità $v(x)$ a $v(x') - u(x)$ otteniamo

$$\begin{aligned} v(x') - u(x) &= v(x') - v(x) + v(x) - u(x) \\ &= v(x) - u(x) + (x'-x)O(x^{kh-2}(\log x)^{p_h}) \\ &= x^{kh-1}(\log x)^{p_h}(h_2(x) - h_1(x)) + (x'-x)O(x^{kh-2}(\log x)^{p_h}) \\ &= (x'-x)O\left(|x|^{kh-2}\left|\log|x|\right|^{p_h}\right) + O\left(|x|^{kh-1}\left|\log|x|\right|^{p_h}\right)\|h_2 - h_1\|_\infty. \end{aligned}$$

Quindi, sostituendo in (4.12),

$$\begin{aligned} f_v(x') - f_u(x) &= (x'-x)\left[1 - \frac{1}{k}\sum_{i=0}^{k}(x')^i x^{k-i} + O\left(\left|(x'')\right|^{2k}\left|\log|x''|\right|\right)\right] \\ &\quad + (x'-x)O\left(|x|^{kh+k-1}\left|\log|x|\right|^{p_h}\right) + O\left(|x|^{kh+k}\left|\log|x|\right|^{p_h}\right)\|h_2 - h_1\|_\infty \\ &= (x'-x)\left[1 - \frac{1}{k}\sum_{i=0}^{k}(x')^i x^{k-i} + O\left(|x|^{kh+k-1}\left|\log|x|\right|,|x|^{2k}\left|\log|x|\right|\right)\right] + \\ &\quad + O\left(|x|^{kh+k}\left|\log|x|\right|^{p_h}\right)\|h_2 - h_1\|_\infty. \end{aligned}$$

Rimane da fare la stima di $f_v(x') - f_u(x)$: per x e x' in Π_r^i e r abbastanza piccolo, la quantità tra parentesi quadre è limitata. Più precisamente

$$\left|1 - \frac{1}{k}\sum_{i=0}^{k}(x')^i x^{k-i} + O\left(|x|^{2k}\left|\log|x|\right|\right)\right| = 1 + O\left(x^k\right) \leq 1,$$

se x è abbastanza piccolo. Infine esiste una costante K tale che è possibile fare la seguente disuguaglianza

$$\left|f_v(x') - f_u(x)\right| \leq \left|x'-x\right| + K\,|x|^{kh+k}\left|\log|x|\right|^{p_h}\|h_2 - h_1\|_\infty.$$

Iterando, per n generico,

$$\begin{aligned}\left|f_v^n(x') - f_u^n(x)\right| &\leq \left|f_v^{n-1}(x') - f_u^{n-1}(x)\right| + K\left|x_{n-1}\right|^{kh+k}\left|\log\left|x_{n-1}\right|\right|^{p_h}\|h_2 - h_1\|_\infty \\ &\leq \left|x' - x\right| + K\sum_{i=0}^{n-1}\left|x_i\right|^{kh+k}\left|\log\left|x_i\right|\right|^{p_h}\|h_2 - h_1\|_\infty.\end{aligned}$$

In particolare, se $x = x'$, otteniamo

$$\begin{aligned}\left|x'_n - x_n\right| &\leq K\sum_{i=0}^{n-1}\left|x_i\right|^{kh+k}\left|\log\left|x_i\right|\right|^{p_h}\|h_2 - h_1\|_\infty \\ &\leq K\sum_{i=0}^{\infty}\left|x_i\right|^{kh+k}\left|\log\left|x_i\right|\right|^{p_h}\|h_2 - h_1\|_\infty \\ &\leq K'\left|x\right|^{kh}\left|\log\left|x\right|\right|^{p_h}\|h_2 - h_1\|_\infty,\end{aligned}$$

in cui l'ultima disuguaglianza segue dal corollario 4.2 e $K' = KC_{k(h+1),p_h}$. □

Possiamo ora dimostrare che $\mathrm{T}\,|_{E^i_{\mathrm{T}}(r,C_0,C_1)}$ è una contrazione.

Proposizione 4.8. *Sia* T *l'operatore definito in (4.10). Allora per* r *abbastanza piccolo* T *è una contrazione dello spazio metrico completo* $E^i_{\mathrm{T}}(r, C_0, C_1)$ *in se stesso.*

Dimostrazione. Siano $u(\cdot) = x^{kh-1}(\log x)^{p_h}h_1(\cdot)$ e $v(\cdot) = x^{kh-1}(\log x)^{p_h}h_2(\cdot)$ due funzioni in $E^i_{\mathrm{T}}(r, C_0, C_1)$. Vogliamo dimostrare che, per ogni u e v in $E^i_{\mathrm{T}}(r, C_0, C_1)$,

$$\|\mathrm{T}\,u - \mathrm{T}\,v\| \leq C\|u - v\|$$

con $C < 1$. Possiamo scrivere

$$\mathrm{T}\,u(x) - \mathrm{T}\,v(x) = x^{kA}\sum_{n=0}^{\infty}\left[x_n^{-kA}H(x_n, u(x_n)) - x_n'^{-kA}H(x'_n, v(x'_n))\right]$$

e aggiungendo e sottraendo $x_n^{-kA}H(x'_n, v(x'_n))$

$$\begin{aligned}\mathrm{T}\,u(x) - \mathrm{T}\,v(x) = &\underbrace{x^{kA}\sum_{n=0}^{\infty}x_n^{-kA}\left[H(x_n, u(x_n)) - H(x'_n, v(x'_n))\right]}_{S_1} \\ &+ \underbrace{x^{kA}\sum_{n=0}^{\infty}\left[x_n^{-kA} - x_n'^{-kA}\right]H(x'_n, v(x'_n))}_{S_2}.\end{aligned}$$

Per quanto riguarda S_1: siccome $H(x,u) = O\left(\|u\|^2x^k,\ \|u\|x^{k+1}\log x,\ x^{k(h+1)}(\log x)^{p_h}\right)$, come già visto in precedenza, per $u(x) = x^{kh-1}(\log x)^{p_h}h_1(x)$, possiamo trascurare la parte $O\left(\|u\|^2 x^k\right)$. In particolare esistono $\alpha(x,u)$ e $\beta(x,u)$ olomorfe nelle variabili x, u e $x^k(\log x)^{p_h}$ tali che

$$H(x,u) = ux^{k+1}(\log x)\alpha(x,u) + x^{k(h+1)}(\log x)^{p_h}\beta(x,u).$$

Quindi, usando le disuguaglianze per le derivate parziali di H della dimostrazione del Lemma 4.6, otteniamo che

$$\begin{aligned}
&\left\|H(x_n,u(x_n)) - H(x_n',v(x_n'))\right\| \\
&\leq K\left[\left\|\frac{\partial H}{\partial x}(x_n,u(x_n))\right\|\left|x_n - x_n'\right| + \left\|\frac{\partial H}{\partial u}(x_n,u(x_n))\right\|\left\|u(x_n) - v(x_n')\right\|\right] \\
&\leq K_1\left[\|u(x_n) - v(x_n')\|\left|x_n\right|^{k+1}\left|\log|x_n|\right| + \left|x_n - x_n'\right|\left|x_n\right|^{k(h+1)-1}\left|\log|x_n|\right|^{p_h}\right].
\end{aligned}$$

Come visto nella dimostrazione del Lemma 4.7, per la (4.13), esistono costanti A', B' e K_2 tale che

$$\begin{aligned}
&\|v(x_n') - u(x_n)\| \leq \|v(x_n') - v(x_n)\| + \|v(x_n) - u(x_n)\| \\
&\leq A'\left|x_n' - x_n\right|\left|x_n\right|^{kh-2}\left|\log|x_n|\right|^{p_h} + B'\left|x_n\right|^{kh-1}\left|\log|x_n|\right|^{p_h}\|h_2 - h_1\|_\infty \\
&\leq K_2\left[\left|x_n\right|^{kh-2}\left|\log|x_n|\right|^{p_h}\left|x\right|^{kh}\left|\log|x|\right|^{p_h} + \left|x_n\right|^{kh-1}\left|\log|x_n|\right|^{p_h}\right]\|h_2 - h_1\|_\infty \\
&= K_2\left|x_n\right|^{kh-2}\left|\log|x_n|\right|^{p_h}\left[\left|x\right|^{kh}\left|\log|x|\right|^{p_h} + \left|x_n\right|\right]\|h_2 - h_1\|_\infty,
\end{aligned}$$

in cui l'ultima disuguaglianza è data dal lemma precedente. Usando le disuguaglianze appena mostrate nella stima di S_1, otteniamo

$$\begin{aligned}
\|S_1\| &\leq \sum_{n=0}^{\infty}\left\|\left(\frac{x_n}{x}\right)^{-kA}\right\|\left\|H(x_n,u(x_n)) - H(x_n',v(x_n'))\right\| \\
&\leq K_1\sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{x_n}{x}\right|^{-k(\lambda+\epsilon)}\left\{\left|x_n - x_n'\right|\left|x_n\right|^{k(h+1)-1}\left|\log|x_n|\right|^{p_h} + \right. \\
&\quad \left. + K_2\left|x_n\right|^{k(h+1)-1}\left|\log|x_n|\right|^{p_h+1}\left[\left|x\right|^{kh}\left|\log|x|\right|^{p_h} + \left|x_n\right|\right]\|h_2 - h_1\|_\infty\right\}.
\end{aligned}$$

Nella parte tra parentesi graffe $(*)$ possiamo ancora maggiorare $|x_n - x_n'|$, ottenendo così tre addendi

$$\begin{aligned}
(*) \leq\ &\underbrace{K'\left|x_n\right|^{k(h+1)-1}\left|\log|x_n|\right|^{p_h}\left|x\right|^{kh}\left|\log|x|\right|^{p_h}\|h_2 - h_1\|_\infty}_{(i)} \\
&+ \underbrace{K_2\left|x_n\right|^{k(h+1)-1}\left|\log|x_n|\right|^{p_h+1}\left|x\right|^{kh}\left|\log|x|\right|^{p_h}\|h_2 - h_1\|_\infty}_{(ii)} \\
&+ \underbrace{K_2\left|x_n\right|^{k(h+1)}\left|\log|x_n|\right|^{p_h+1}\|h_2 - h_1\|_\infty}_{(iii)}
\end{aligned}$$

e, infine, applicando di nuovo il corollario 4.2,

$$
\begin{aligned}
\|S_1\| &\leq K_1 \sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{x_n}{x}\right|^{-k(\lambda+\epsilon)} \Big[(i)+(ii)+(iii)\Big] \\
&\leq C_1 |x|^{2kh-1} |\log|x||^{2p_h} \|h_2-h_1\|_\infty + C_2 |x|^{2kh-1} |\log|x||^{2p_h+1} \|h_2-h_1\|_\infty \\
&\quad + C_3 |x|^{kh} |\log|x||^{p_h+1} \|h_2-h_1\|_\infty \\
&\leq K_1 |x|^{kh} |\log|x||^{p_h+1} \|h_2-h_1\|_\infty .
\end{aligned}
$$

Passiamo ora al termine S_2. Possiamo scrivere

$$
x_n^{-kA} - x_n'^{-kA} = x_n^{-kA}\left(I - \exp\left(-A\log\frac{x_n'}{x_n}\right)\right).
$$

Passando alle norme

$$
\begin{aligned}
&\left\|\left(I - \exp\left(- kA\log\frac{x_n'}{x_n}\right)\right) H(x_n', v(x_n'))\right\| \\
&\qquad\qquad \leq C \left\|kA\log\frac{x_n'}{x_n}\right\| \left\|H(x_n', v(x_n'))\right\| \\
&\qquad\qquad \leq C' \frac{|x_n'-x_n|}{|x_n|} |x_n|^{k(h+1)} |\log|x_n||^{p_h} \\
&\qquad\qquad \leq C'' x^{k(h+1)-1} |\log|x_n||^{p_h} |x|^{kh} |\log|x||^{p_h} \|h_2-h_1\|_\infty .
\end{aligned}
$$

Per il Corollario 4.2 abbiamo che $\|S_2\| \leq K_2 |x|^{2kh-1} |\log|x||^{2p_h} \|h_2-h_1\|_\infty$. Il termine S_2 è di ordine più alto rispetto ad S_1, quindi, per r abbastanza piccolo, esiste una costante K tale che

$$
\|\mathrm{T}\,u(x) - \mathrm{T}\,v(x)\| \leq K |x|^{kh} |\log|x||^{p_h} \|h_2-h_1\|_\infty .
$$

Per come è stata definita la norma in $E_{\mathrm{T}}(r, C_0, C_1)$, per r abbastanza piccolo, esiste una costante $c < 1$ tale che

$$
\|\mathrm{T}\,u - \mathrm{T}\,v\| \leq c\|u-v\|.
$$

Quinidi T è una contrazione. □

Concludiamo con il seguente corollario

Corollario 4.9. *Se* T *l'operatore definito in precedenza, allora esiste un'applicazione olomorfa* $u : \Pi_r^i \to \mathbb{C}^{p-1}$ *che soddisfa l'equazione funzionale (4.2).*

Dimostrazione. Per la proposizione precedente, siccome T è una contrazione, esiste un unico punto fisso $u \in E_{\mathrm{T}}^i(r, C_0, C_1)$. Facciamo vedere che questa u

soddisfa l'equazione funzionale (4.2). Dalla definizione di H ricaviamo che $f(x,u)^{-kA}\Psi(x,u) = x^{-kA}u - x^{-kA}H(x,u)$ e quindi

$$H(x,u(x)) = u(x) - x^{kA}x_1^{-kA}\Psi(x,u(x)).$$

Sostituendo nella prossima equazione otteniamo

$$\begin{aligned}
\mathrm{T}\,u(x) &= x^{kA}\sum_{n=0}^{\infty} x_n^{-kA}H(x_n,u(x_n)) \\
&= H(x,u(x)) + x^{kA}x_1^{-kA}H(x_1,u(x_1)) + \cdots \\
&= u(x) - x^{kA}x_1^{-kA}\Psi(x,u(x)) \\
&\quad + x^{kA}x_1^{-kA}[u(x_1) - x_1^{kA}x_2^{-kA}\Psi(x_1,u(x_1))] + \cdots .
\end{aligned}$$

Quindi $\mathrm{T}\,u = u$ se e solo se

$$-x^{kA}x_1^{-kA}[\Psi(x,u(x)) - u(x_1)] - x^{kA}x_2^{-kA}[\Psi(x_1,u(x_1)) - u(x_2)] + \cdots = 0,$$

cioè se

$$\Psi(x_n,u(x_n)) = u(f(x_n,u(x_n))) \text{ per ogni } n \geq 0.$$

$\square$

Capitolo 5

Esistenza di domini attrattivi

Come conseguenza del Teorema (4.9) dimostrato nel Capitolo 4 si ha che è possibile trovare, oltre ad una curva tangente alla direzione caratteristica interessata v, anche un aperto connesso che contiene l'origine nel bordo, in cui ogni punto è attratto dall'origine tangenzialmente a v.

Teorema 5.1. *Sia F un germe da $(\mathbb{C}^p, 0)$ in $(\mathbb{C}^p, 0)$ tangente all'identità. Sia v una direzione caratteristica non degenere. Se la matrice $A = A(v)$ associata a v ha soltanto autovalori con parte reale strettamente positiva, allora esistono k domini invarianti parabolici in cui ogni punto è attratto dall'origine lungo una traiettoria tangente a v.*

Dimostrazione. Siccome v è una direzione caratteristica non degenere, per il Teorema 4.9 è possibile scegliere delle coordinate $(x, y) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^{p-1}$, analitiche nel settore

$$S^i_{r,c} = \left\{(x, y) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^{p-1} \mid x \in \Pi^i_r,\ \|y\| \leq c\,|x|\right\}$$

dove Π^i_r sono le componenti connesse dell'insieme $\left\{\left|x^k - r\right| < r\right\}$, tali che, dopo il blow-up $y = ux$, la trasformazione è della forma

$$\begin{cases} x_1 = f(x, u) = x - \frac{1}{k}x^{k+1} + O\left(\|u\|x^{k+1}, x^{2k+1}\log x\right), \\ u_1 = \Psi(x, u) = (I - x^k A)u + O\left(\|u\|x^{k+1}\log x, \|u\|^2 x^k\right). \end{cases}$$

In particolare, dopo il blow-up, $\|u\| \leq c$. Ora è necessario lavorare con la matrice A. Siano $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}\}$ gli autovalori di A. Per ipotesi

$$\operatorname{Re}\alpha_j > 0, \quad j = 1, \ldots, p-1,$$

quindi possiamo scegliere una costante λ tale che, per ogni j, si abbia $\operatorname{Re}\alpha_j > \lambda$. Come fatto nei precedenti capitoli, senza perdita di generalità, è possibile scegliere le coordinate in modo che A sia in forma di Jordan.

Quindi possiamo assumere che sia una matrice a blocchi

$$A = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & J_k \end{pmatrix},$$

in cui ogni blocco J_j, associato ad un autovalore α, è della forma

$$J_j = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha \end{pmatrix} \text{ oppure } J_j = \begin{pmatrix} \alpha & \epsilon & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \epsilon \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha \end{pmatrix},$$

con ϵ più piccolo di λ.

Ora bisogna restringere ulteriormente il dominio per ottenere delle stime per x_1 e u_1. Definiamo, per $j = 1, \dots, p-1$ i dischi Δ_j

$$\Delta_j = \{x \in \mathbb{C} \mid |1 - \alpha_j x| \leq 1\}.$$

Poiché $\mathrm{Re}\,\alpha_j > 0$ esistono delle costanti γ e ρ tali che il settore

$$S_{\gamma,\rho} = \{x \in \mathbb{C} \mid |\mathrm{Im}\,x| \leq \gamma \mathrm{Re}\,x,\ |x| \leq \rho\} \subset \bigcap_{j=1}^{p-1} \Delta_j \cap \overline{\mathbb{D}}_r \subset \Pi_r^i.$$

Per ogni $i = 1, \dots, k$ definiamo gli insiemi

$$S^i_{\gamma,\rho} = \{x \in \Pi_r^i \mid x^k \in S_{\gamma,\rho}\}.$$

Vogliamo dimostrare che, per ogni $i = 1, \dots, k$, i k insiemi

$$A^i_{\gamma,\rho,c} = S^i_{\gamma,\rho} \times \{\|u\| \leq c\}$$

sono dei domini invarianti attrattivi. Ricordando che esiste K tale che

$$\|u_1 - (I - x^k A)u\| \leq K(\|u\|\,|x|^{k+1}\,|\log|x|| + \|u\|^2\,|x|^k),$$

per $(x,u) \in A^i_{\gamma,\rho,c}$ si ha

$$\|u_1\| \leq \|(I - x^k A)u\| + K\|u\|\,|x|^k\left[|x|\,|\log|x|| + \|u\|\right],$$

e, se γ, ρ e c sono abbastanza piccoli,

$$\|u_1\| \leq \|u\|\|I - x^k A\| \leq \|u\|(1 - \lambda\,|x|^k). \tag{5.1}$$

Nell'ultima disuguaglianza abbiamo usato che, se $A = D + N$, allora

$$\begin{aligned}\|I - x^k A\| &= \|I - x^k D + x^k D - x^k A\| \\ &\leq \|I - x^k D\| + |x|^k \|D - A\| \\ &\leq \max_j \left|1 - \alpha_j x^k\right| + |x|^k \epsilon.\end{aligned}$$

Poiché $1-\alpha_j x^k = 1-\mathrm{Re}\,\alpha_j \mathrm{Re}\,x^k + \mathrm{Im}\,\alpha_j \mathrm{Im}\,x^k - i(\mathrm{Re}\,\alpha_j \mathrm{Im}\,x^k + \mathrm{Im}\,\alpha_j \mathrm{Re}\,x^k)$, possiamo stimare

$$\begin{aligned}\left|1 - \alpha_j x^k\right|^2 &\leq 1 + (\mathrm{Re}\,\alpha_j)^2(\mathrm{Re}\,x^k)^2 - 2\mathrm{Re}\,\alpha_j \mathrm{Re}\,x^k + (\mathrm{Im}\,\alpha_j)^2(\mathrm{Im}\,x^k)^2 \\ &\quad + 2\mathrm{Im}\,\alpha_j \mathrm{Im}\,x^k + (\mathrm{Re}\,\alpha_j)^2(\mathrm{Im}\,x^k)^2 + (\mathrm{Im}\,\alpha_j)^2(\mathrm{Re}\,x^k)^2 \\ &= 1 + |\alpha_j|^2 |x|^{2k} - 2\mathrm{Re}\,\alpha_j \mathrm{Re}\,x^k - 2\mathrm{Re}\,\alpha_j \mathrm{Re}\,|x|^k + 2\mathrm{Re}\,\alpha_j \mathrm{Re}\,|x|^k \\ &\quad + 2\mathrm{Im}\,\alpha_j \mathrm{Im}\,x^k \\ &= 1 + |\alpha_j|^2 |x|^{2k} - 2\mathrm{Re}\,\alpha_j |x|^k + 2\mathrm{Im}\,\alpha_j \mathrm{Im}\,x^k + 2(\mathrm{Re}\,\alpha_j)(|x|^k - \mathrm{Re}\,x^k) \\ &\leq 1 - 2\mathrm{Re}\,\alpha_j |x|^k + |\alpha_j|^2 |x|^{2k} + 2(|\mathrm{Im}\,\alpha_j| + |\mathrm{Re}\,\alpha_j|)\left|\mathrm{Re}\,x^k\right| \\ &\leq (1 - \mathrm{Re}\,\alpha_j |x|^k)^2 + \epsilon' x^{2k}.\end{aligned}$$

Quindi, per ogni j, si ha che $\left|1 - \alpha_j x^k\right| \leq 1 - \lambda |x|^k$ e

$$\|I - x^k A\| \leq 1 - (\lambda + \epsilon') |x|^k + |x|^k \epsilon = 1 - |x|^k (\lambda + \epsilon'').$$

Quindi $\|u_1\|$ è uniformemente limitato. Per quanto riguarda x_1: sappiamo che $x_1 = x - \frac{1}{k}x^{k+1} + O\left(\|u\|x^{k+1}, x^{2k+1}\log x\right)$ e, invertendo ed elevando alla potenza k-esima, otteniamo che

$$\begin{aligned}\frac{1}{x_1^k} &= \frac{1}{x^k}\left[1 + \frac{1}{k}x^k + O\left(\|u\|x^k, x^{2k}\log x\right)\right]^k \\ &= \frac{1}{x^k} + 1 + O\left(\|u\|, x^k \log x\right).\end{aligned} \tag{5.2}$$

Dunque esiste una costante $\tilde{C}$, indipendente da u, tale che

$$\left|\frac{1}{x_1^k} - \frac{1}{x^k} - 1\right| \leq \tilde{C}\|u\| + K |x|^k |\log |x||. \tag{5.3}$$

Mediante quest'ultima relazione possiamo dimostrare che l'insieme $S^i_{\gamma,\rho,c}$ è un dominio invariante. In particolare basta fare vedere che

$$\begin{cases} \|u_1\| \leq c \\ \left|\mathrm{Im}\,x_1^k\right| \leq \gamma \mathrm{Re}\,x_1^k \\ \left|x_1^k\right| \leq \rho. \end{cases}$$

Per quanto riguarda u_1, sappiamo che è uniformemente limitato, infatti

$$\|u_1\| \leq \|u\| \left(1 - \lambda |x|^k\right) \leq c \left(1 - \lambda |x|^k\right) \leq c,$$

per ogni scelta di $\lambda \geq 0$. Invece per x_1: dimostrare che $A^i_{\gamma,\rho,c}$ è invariante per la trasformazione f è equivalente a mostrare che, per u abbastanza piccolo, $(A^i_{\gamma,\rho,c})^* = \{x \in \mathbb{C} \mid \frac{1}{x} \in S_{\gamma,\rho}\}$ è invariante per la trasformazione $\frac{1}{(f)^k}$. Usando la disuguaglianza (5.1) e la (5.3), si vede che, per x e u abbastanza piccoli, $\frac{1}{x_1^k}$ è vicina alla traslazione a destra. Quindi $(A^i_{\gamma,\rho,c})^*$ è invariante.

Per concludere la dimostrazione rimane da vedere che, preso un punto $(x,u) \in S^i_{\gamma,\rho,c}$, questo converge all'origine lungo la direzione $(1,0)$. Procederemo nel seguente modo: mostriamo che $x_n^k \sim \frac{1}{n}$ e che $\|u_n\| \leq C\frac{1}{n^\lambda}$ per ogni $\lambda < \max_j \operatorname{Re} \alpha_j$. Per la (5.2) abbiamo che

$$\begin{aligned}\frac{1}{x_n^k} &= \frac{1}{x_{n-1}^k} + 1 + O\left(\|u_{n-1}\|, x_{n-1}^k \log x_{n-1}\right) \\ &= \frac{1}{x^k} + n + \sum_{i=0}^{n-1} O\left(\|u_i\|, x_i^k \log x_i\right).\end{aligned}$$

Dividendo per n otteniamo

$$\frac{1}{nx_n^k} = \frac{1}{nx^k} + 1 + \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} O\left(\|u_i\|, x_i^k \log x_i\right),$$

in cui la somma è limitata. Quindi

$$\frac{1}{nx_n^k} = O(1),$$

da cui segue che

$$x_n^k \sim \frac{1}{n}.$$

Sia infine $\mu < \lambda$. Allora

$$\begin{aligned}x_1^{-k\mu} &= x^{-k\mu}\left[1 - \frac{1}{k}x^k + O\left(x^{2k}\log x, \|u\| x^k\right)\right]^{-k\mu} \\ &= x^{-k\mu}\left[1 + \mu x^k + O\left(x^{2k}\log x, \|u\| x^k\right)\right].\end{aligned}$$

Concludiamo che

$$\begin{aligned}|x_1|^{-k\mu} &\leq |x|^{-k\mu}\left|1 + \mu x^k + O\left(\|u\| x^k, x^{2k}\log x\right)\right| \\ &\leq |x|^{-k\mu}(1 + \lambda |x|^k).\end{aligned}$$

Ne segue che

$$\begin{aligned}\|u_1\|\,|x_1|^{-k\mu} &\le \|u\|(1-\lambda\,|x|^k)\,|x|^{-k\mu}\,(1+\lambda\,|x|^k)\\ &= \|u\|\,|x|^{-k\mu}\,(1-\lambda^2\,|x|^{2k}) < \|u\|\,|x|^{-k\mu}\,.\end{aligned}$$

Passando all'n-esima iterata otteniamo che esiste una costante C tale che

$$\|u_n\|\,|x_n|^{-k\mu} < \|u\|\,|x|^{-k\mu} \le C,$$

da cui segue che

$$\|u_n\| \le C\,|x_n|^{k\mu}\,.$$

Quindi $\|u_n\| = O\left(\frac{1}{n^\lambda}\right)$ per ogni λ tale che $\operatorname{Re}\alpha_j > \lambda$. Concludiamo che ogni $(x,u) \in S^i_{\gamma,\rho,c}$, (x,u) converge all'origine lungo la direzione $[1:0]$. $\square$

Capitolo 6

Sui domini attrattivi

È possibile invertire il Teorema 5.1 e dimostrare la seguente proposizione:

Proposizione 6.1. *Sia Φ un germe di $(\mathbb{C}^p, 0)$ in sé tangente all'identità e sia $V = (1,0)$ una direzione caratteristica non degenere. Se V ammette un bacino d'attrazione Ω, con punti le cui orbite convergono all'origine tangenzialmente a V, allora tutti i direttori di V hanno parte reale strettamente positiva.*

L'idea della dimostrazione è la seguente:

1. si fa vedere che possiamo trovare un dominio invariante $D_{s,\rho}$ che non interseca $\{x = 0\}$ tale che l'orbita di ogni punto $X = (x,y) \in \Omega$ sia definitivamente in $D_{s,\rho}$. Allora è possibile fare il blow-up $y = Ux$ e tutti i cambi di coordinate necessari nei seguenti passi della dimostrazione. Se d è la dimensione del sottospazio generato dagli autovettori associati ai direttori i cui direttori hanno parte reale strettamente positiva si può supporre che dopo il blow-up, la trasformazione sia, in $D_{s,\rho}$, nella seguente forma:

$$\Phi(x,u,v) = \begin{cases} x_1 = f(x,u,v) = x - \frac{1}{k}x^{k+1} + F(x,u,v), \\ u_1 = g(x,u,v) = (I - x^k A)u + G(x,u,v), \\ v_1 = h(x,u,v) = (I - x^k B)v + H(x,u,v), \end{cases}$$

   dove A e B sono matrici quasi diagonali di dimensione $d \times d$ e $(p-d-1) \times (p-d-1)$ e F, G e H sono opportune funzioni olomorfe.

2. Facendo ulteriori cambi di coordinate, si ottengono delle stime migliori per $H(x,u,v)$ e in particolare che $H(x,u,0) = 0$. In particolare dimostriamo il seguente risultato: dato un germe Φ, possiamo trovare una varietà parabolica di dimensione $d+1$, dove d è il numero degli autovalori, contati con molteplicità, che hanno parte reale strettamente positiva.

3. Si mostra che nel caso esistano degli autovalori con parte reale non positiva (cioè $p - d - 1 > 0$), preso un punto in $(x, u, v) \in D_{s,\rho}$, allora $v_n(x, u, v)$ converge solo se è $v = 0$, cioè solo se il punto sta nella varietà di dimensione $d + 1$. In particolare la matrice associata alla direzione V può avere solo autovalori con parte reale strettamente positiva.

Cominciamo con il punto 1. Dimostriamo il seguente lemma preliminare.

Lemma 6.2. *Sia Φ un germe di $(\mathbb{C}^p, 0)$ in sé tangente all'identità. Se $X = (x, y)$ è un punto in $\mathbb{C}^p \setminus \{(0, 0)\}$ tale che $X_n = \Phi^n(x, y)$ converge all'origine e $[X_n]$ converge a $[1 : 0]$, allora esistono delle costanti γ, s e ρ tali che, per n abbastanza grande, si ha che $x_n \neq 0$ e $X_n = (x_n, y_n)$ sta nel settore $S_{\gamma,s,\rho}$, definito, per $x \neq 0$ e $U = \frac{y}{x}$, nel seguente modo*

$$S_{\gamma,s,\rho} = \left\{(x, U) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^{p-1} \;\middle|\; \left|\operatorname{Im} x^k\right| \leq \gamma \operatorname{Re} x^k,\ |x|^k < s,\ \|U\| < \rho\right\}.$$

Dimostrazione. Siccome $X_n = (x_n, y_n)$ converge a 0 e $[X_n]$ converge a $[1 : 0]$, allora si ha che x_n è definitivamente diverso da 0. Inoltre X_n sta definitivamente nella palla $D_{s,\rho} = \{(x, U) \mid |x| \leq s,\ \|U\| \leq \rho\}$. Inoltre sappiamo che, per la Proposizione 2.1, la prima coordinata dell'applicazione è della forma $x_1 = x - \frac{1}{k}x^{k+1} + O\left(\|U\|x^{k+1}, x^{2k+1}\right)$, e che $x_n^k \sim \frac{1}{n}$. Quindi, per ogni γ arbitrariamente piccolo e per n abbastanza grande, si ha $\left|\operatorname{Im} x_n^k\right| \leq \gamma \operatorname{Re} x_n^k$ e, definitivamente, X_n sta in $S_{\gamma,s,\rho}$. □

Per la Proposizione 3.5 sappiamo che la trasformazione Φ, dopo il blow-up, è della seguente forma:

$$\begin{cases} x_1 = f(x, u, v) = x - \frac{1}{k}x^{k+1} + F(x, u, v), \\ u_1 = g(x, u, v) = (I - x^k A)u + G(x, u, v), \\ v_1 = h(x, u, v) = (I - x^k B)v + H(x, u, v), \end{cases} \tag{6.1}$$

dove A e B sono matrici quasi diagonali, rispettivamente con autovalori con parte reale strettamente positiva e con parte reale non positiva, e con F, G, H che soddisfano le seguenti condizioni:

$$\begin{cases} F(x, u, v) = O\left(\|(u, v)\|x^{k+1}, x^{2k+1}\log x\right), \\ G(x, u, v) = O\left(\|(u, v)\|x^{k+1}\log x, \|(u, v)\|^2 x^k\right), \\ H(x, u, v) = O\left(\|(u, v)\|x^{k+1}\log x, \|(u, v)\|^2 x^k\right). \end{cases} \tag{6.2}$$

Inoltre F, G, H sono olomorfe in un aperto del tipo

$$\Delta_{r,\rho} = \left\{(x, u, v) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^d \times \mathbb{C}^{p-d-1} \;\middle|\; \left|x^k - r\right| < r,\ \|(u, v)\| < \rho\right\},$$

e quindi anche in $S_{\gamma,s,\rho}$.Mediante la prossima proposizione è possibile modificare ulteriormente le ultime $p - d - 1$ coordinate della trasformazione Φ.

Proposizione 6.3. *Sia Φ un germe tangente all'identità, con $V = (1,0)$ direzione caratteristica non degenere, tale che la matrice $A(v) = Diag(A,B)$ verifichi la seguente proprietà:*

$$\begin{aligned} &\operatorname{Re}\lambda_j > \alpha > 0, \text{ per ogni } \lambda_j \text{ autovalore di } A \\ &\operatorname{Re}\mu_j \leq 0, \text{ per ogni } \mu_j \text{ autovalore di } B. \end{aligned}$$

Allora, per ogni scelta di $N, m \geq 2$, è possibile scegliere delle coordinate (x,u,v) in $\Delta_{r,\rho}$ come prima, con H che soddisfa

$$H(x,u,0) = O\left(|x|^k \|u\|^m + |x|^N \|u\|\right).$$

Dimostrazione. Per le stime nelle equazioni (6.2) è possibile scrivere H in una forma più conveniente. Infatti, per ogni $N \in \mathbb{N}$, è vero che

$$H(x,u,v) = \sum_{k \leq s \leq N,\, t \in E_s} c_{s,t}(u,v) x^s (\log x)^t + O\left(\|(u,v)\| \, |x|^N \, |\log|x||^{h_N}\right),$$

per un certo $h_N \in \mathbb{N}$ che dipende da N e dove con E_s indichiamo l'insieme degli interi t tali che il termine $x^s(\log x)^t$ compare nella serie. Con abuso di notazione scriveremo

$$H(x,u,0) = \sum_{k \leq s \leq N,\, t \in E_s} c_{s,t}(u) x^s (\log x)^t + O\left(\|u\| \, |x|^N \, |\log|x||^{h_N}\right), \quad (6.3)$$

ricordando che, per ogni s e t, $c_{s,t}(u)$ è un'applicazione olomorfa in u di ordine almeno pari ad 1. Mostreremo che, quando $s \leq N$, mediante cambi di coordinate $\tilde{v} = v - \lambda(x,u)$, è possibile aumentare l'ordine di $c_{s,t}$ fino ad m. Infatti vale il seguente lemma:

Lemma 6.4. *Sia Φ un germe $(\mathbb{C}^p, 0)$ in sé tangente all'identità, con $V = (1,0)$ direzione caratteristica non degenere, tale che la matrice $A(v) = Diag(A,B)$ verifichi la seguente proprietà:*

$$\begin{aligned} &\operatorname{Re}\lambda_j > \alpha > 0, \text{ per ogni } \lambda_j \text{ autovalore di } A \\ &\operatorname{Re}\mu_k \leq 0, \text{ per ogni } \mu_j \text{ autovalore di } B. \end{aligned}$$

Sia data H che verifica (6.3) e sia $\bar{s}$ il più piccolo intero che compare in (6.3) e sia $m \geq 2$; per tale $\bar{s}$ sia $\bar{t}$ il più grande intero in $E_{\bar{s}}$, per cui $c_{\bar{s},\bar{t}}$ sia di ordine $\bar{d}$ inferiore a m. Allora esiste un'applicazione polinomiale $P(u)$ omogenea di grado $\bar{d}$, a valori in $\mathbb{C}^l$, tale che, dopo la trasformazione di v in

$$\tilde{v} = v - x^{\bar{s}-k} (\log x)^{\bar{t}} P(u),$$

$c_{\bar{s},\bar{t}}(u)$ è di ordine superiore a $\bar{d}$.

Dimostrazione. Poiché $c_{\bar{s},\bar{t}}(u)$ è di ordine $\bar{d}$ scriviamo

$$c_{\bar{s},\bar{t}}(u) = Q(u) + O\left(\|u\|^{d+1}\right),$$

per una certa applicazione polinomiale $Q(u)$ omogenea di grado d a valori in $\mathbb{C}^l$. Inoltre evidenziamo il termine di ordine $c_{\bar{s},\bar{t}}(u)x^{\bar{s}}(\log x)^{\bar{t}}$ in (6.3)

$$H(x,u,0) = c_{\bar{s},\bar{t}}(u)x^{\bar{s}}(\log x)^{\bar{t}} + \sideset{}{'}\sum_{k\le s\le N,\, t\in E_s,\, (s,t)\neq(\bar{s},\bar{t})} c_{s,t}(u)x^s(\log x)^t + O\left(\|u\|\,|x|^N\,|\log|x||^{h_N}\right). \tag{6.4}$$

Usando il cambio di coordinate

$$\tilde{v} = v - x^{\bar{s}-k}(\log x)^{\bar{t}}P(u),$$

isoliamo i termini di ordine inferiore a $\bar{s}$ in u e di ordine inferiore a $\bar{t}$ in x

$$\begin{aligned}\tilde{v}_1 &= v_1 - x_1^{\bar{s}-k}(\log x_1)^{\bar{t}}P(u_1)\\ &= (I - x^kB)(\tilde{v} + x^{\bar{s}-k}(\log x)^{\bar{t}}P(u)) + H(x,u,v) - x_1^{\bar{s}-k}(\log x_1)^{\bar{t}}P(u_1)\\ &= (I - x^kB)\tilde{v} + \tilde{H}(x,u,\tilde{v}),\end{aligned}$$

dove $\tilde{H}(x,u,\tilde{v}) = (I - x^kB)x^{\bar{s}-k}(\log x)^{\bar{t}}P(u) + H(x,u,\tilde{v} + x^{\bar{s}-k}(\log x)^{\bar{t}}P(u)) - x_1^{\bar{s}-k}(\log x_1)^{\bar{t}}P(u_1)$. Portando avanti i conti in $\tilde{H}(x,u,0)$ abbiamo

$$\begin{aligned}\tilde{H}(x,u,0) = x^{\bar{s}-k}(\log x)^{\bar{t}}P(u) - Bx^{\bar{s}}(\log x)^{\bar{t}}P(u) + \underbrace{H(x,u,x^{\bar{s}-k}(\log x)^{\bar{t}}P(u))}_{(i)}\\ - \underbrace{x_1^{\bar{s}-k}(\log x_1)^{\bar{t}}P(u_1)}_{(ii)}.\end{aligned} \tag{6.5}$$

Per quanto riguarda (i) notiamo che

$$\begin{aligned}(i) &= c_{\bar{s},\bar{t}}(u)x^{\bar{s}}(\log x)^{\bar{t}} + \bar{H}(x,u)\\ &= Q(u)x^{\bar{s}}(\log x)^{\bar{t}} + O\left(\|u\|^{d+1}x^{\bar{s}}(\log x)^{\bar{t}}, \|u\|^d x^{\bar{s}}(\log x)^{\bar{t}-1}, \|u\|\,|x|^N\,|\log|x||^{h_N}\right).\end{aligned}$$

Invece sviluppando (ii) otteniamo

$$\begin{aligned}(ii) &= \left[x\left(1 - \frac{1}{k}x^k + O\left(\|u\|x^k, x^{2k}\log x\right)\right)\right]^{\bar{s}-k}\\ &\quad\times\left[\log x - \frac{1}{k}x^k + O\left(\|u\|x^k, x^{2k}\log x\right)\right]^{\bar{t}} P(u_1)\\ &= \left[x^{\bar{s}-k} - \frac{\bar{s}-k}{k}x^{\bar{s}} + O\left(\|u\|x^{\bar{s}}, x^{\bar{s}+k}\log x\right)\right](\log x)^{\bar{t}}P(u_1)\\ &\quad + O\left(x^{\bar{s}}(\log x)^{\tau}\right)P(u_1)\\ &= x^{\bar{s}-k}(\log x)^{\bar{t}}P(u) - \langle \operatorname{grad} P; x^kAu\rangle - \frac{s-k}{k}x^{\bar{s}}(\log x)^{\bar{t}}P(u)\\ &\quad + O\left(x^s(\log x)^{\tau}, \|u\|x^{\bar{s}}(\log x)^t, x^{\bar{s}+k}(\log x)P(u_1)\right)\end{aligned}$$

in cui abbiamo usato che

$$P(u_1) = P(u - x^k Au + O\left(\|u\|^2 x^k, \|u\| x^{k+1}\log x\right))$$
$$= P((I - x^k A)u) + O\left(x^{\bar{s}}\right) = P(u) + \langle \operatorname{grad} P; -x^k Au\rangle + O\left(x^{2k}, x^{\bar{s}}\right).$$

Chiaramente i termini di ordine $\bar{s} - k$ in (6.5) si cancellano, mentre quelli di ordine $\bar{s}$ in x e d in u posso essere messi in evidenza. In particolare gli l polinomi omogenei di grado d di $\tilde{c}_{\bar{s},\bar{t}}$ in (6.5) sono identicamente nulli se P soddisfa le sequenti l equazioni

$$\langle \operatorname{grad} P_i; Au\rangle - \left(\left(B - \frac{\bar{s}-k}{k} I\right) P(u)\right)_i = -Q_i(u) \quad \forall i = 1, \ldots, l. \qquad (6.6)$$

Queste equazioni costituiscono un sistema lineare nei coefficienti del polinomio P. Quindi dimostrare che il sistema ha una soluzione è equivalente a dimostrare che

$$\langle \operatorname{grad} P_i; Au\rangle - \left(\left(B - \frac{\bar{s}-k}{k} I\right) P(u)\right)_i = 0 \quad \forall i = 1, \ldots, l \Longrightarrow P = 0. \qquad (6.7)$$

Inoltre siccome B è in forma quasi diagonale, se indichiamo con $\epsilon_{i,i+1}$ gli elementi della sopradiagonale, possiamo riscrivere la precedente equazione

$$\frac{\partial P_i}{\partial u_1}(Au)_1 + \cdots + \frac{\partial P_i}{\partial u_q}(Au)_q - \left(\mu_i - \frac{\bar{s}-k}{k}\right) P_i - \epsilon_{i,i+1} P_{i+1} = 0, \qquad (6.8)$$

ricordando inoltre che, per ogni $1 \le i < l$ vale $\epsilon_{i,i+1} = 0$ o 1, mentre $\epsilon_{l,l+1} = 0$. Quindi, procedendo per induzione su i in ordine decrescente da l a 1, ci siamo ridotti a dover risolvere

$$\frac{\partial R}{\partial u_1}(Au)_1 + \cdots + \frac{\partial R}{\partial u_q}(Au)_q - \left(\mu_i - \frac{\bar{s}-k}{k}\right) R = 0 \Longrightarrow R = 0, \qquad (6.9)$$

per un certo polinomio R omogeneo di grado $\bar{d}$. Per la formula di Eulero sappiamo che

$$R = \frac{1}{d}\left[\frac{\partial R}{\partial u_1} u_1 + \cdots + \frac{\partial R}{\partial u_q} u_q\right].$$

Quindi ci possiamo ridurre a risolvere il seguente problema

$$\frac{\partial R}{\partial u_1}(C_i u)_1 + \cdots + \frac{\partial R}{\partial u_q}(C_i u)_q = 0 \Rightarrow R = 0, \qquad (6.10)$$

dove $C_i = A - \frac{\mu_i - \bar{s} + k}{d} I_q$. Dimostriamo la proprietà (6.10) per doppia induzione sulla dimensione q e sul grado $\bar{d}$ di R. Per ogni grado $\bar{d}$, se $q = 1$ allora esiste una costante K_i tale che $R = K_i u_1^{\bar{d}}$; quindi, siccome $\alpha - \frac{\mu_i - \bar{s} + k}{\bar{d}} \neq 0$,

$$\frac{\partial R}{\partial u_1}\left(\alpha - \frac{\mu_i - \bar{s} + k}{\bar{d}}\right) u_1 = 0 \Rightarrow \bar{d} K_i u_1^{\bar{d}} = 0 \Rightarrow K_i = 0,$$

da cui segue che $R = 0$. Allo stesso modo, per ogni q, se $\bar{d} = 1$ allora esistono delle costanti $a_1, \dots, a_q$ tali che $R = a_1 u_1 + \cdots + a_q u_q$; quindi

$$a_1 (C_i u)_1 + \cdots + a_q (C_i u)_q = 0 \Rightarrow a_1 = \cdots = a_q = 0 \Rightarrow R = 0.$$

Per ipotesi induttiva supponiamo che valga la proprietà (6.10) per ogni coppia $(q-1, \bar{d})$ e $(q, \bar{d}-1)$, dove $q > 1$ e $\bar{d} > 1$, e dimostriamo che vale anche per la coppia $(q, \bar{d})$. Supponiamo di avere che $\langle \operatorname{grad} R; Cu \rangle = 0$ per un certo polinomio omogeneo R di grado $\bar{d}$ in q variabili. Se $\tilde{R}(u_1, \dots, u_{q-1}) = R(u_1, \dots, u_{q-1}, 0)$, allora, per ipotesi induttiva,

$$\langle \operatorname{grad} \tilde{R}; C \cdot (u_1, \dots, u_{q-1}, 0) \rangle = 0 \Longrightarrow \tilde{R} = 0.$$

Di conseguenza $R(u) = u_q S(u)$ per un polinomio omogeneo S di grado $\bar{d} - 1$ in q variabili. Dividendo per u_q l'ipotesi otteniamo

$$\frac{\langle \operatorname{grad} R; Cu \rangle}{u_q} = 0 \Longrightarrow \langle \operatorname{grad} S; Cu \rangle + \nu_q S = 0,$$

dove ν_q sono gli autovalori con parte reale strettamente positiva della matrice C. Di nuovo, per la formula di Eulero, la precedente relazione precedente può essere riscritta come

$$\langle \operatorname{grad} S; C' u \rangle = 0,$$

con $C' = C + \frac{\nu_q}{d} I$. Di nuovo, per ipotesi induttiva, $S = 0$ e quindi $R = 0$. □

Applichiamo il lemma appena dimostrato, per gli interi s e t, fino a che $c_{s,t}(u)$ non è almeno di ordine m. A questo punto o $E_s = \emptyset$ o il più grande t' in E_s è minore di t. In tal caso applichiamo di nuovo il lemma, con interi s e t' e procediamo in questo modo fino a che $E_s = \emptyset$. In seguito usiamo il lemma con $s+1$ al posto di s fino a che $s + 1 = k$. Così abbiamo dimostrato la proposizione. □

Teorema 6.5. *Sia F un germe di $(\mathbb{C}^p, 0)$ in sé tangente all'identità. Sia V una direzione caratteristica non degenere e sia $A(v)$ la matrice associata. Se A ha esattamente d autovalori, contati con molteplicità, con parte reale strettamente positiva, allora esiste una varietà parabolica di dimensione $d+1$, con 0 nel bordo, tangente a $\mathbb{C}V \oplus E$ in 0, dove E è l'autospazio associato ai direttori con parte reale strettamente positiva, e tale che ogni suo punto è attratto dall'origine nella direzione V. Inoltre è possibile scegliere delle coordinate (x, u, v) in un settore di $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^d \times \mathbb{C}^{p-d-1}$ in modo che la varietà parabolica sia definita localmente da $v = 0$.*

Da ora in poi lavoreremo con queste coordinate per fare vedere che $\|v_n\|$ non converge a 0, dove v è la coordinata associata agli autovalori non positivi di $A(v)$.

Osservazione 9. *Allo stesso modo di come abbiamo trovato una curva parabolica, possiamo trovare una sottovarietà di dimensione più alta come punto fisso di un certo operatore tra spazi di funzioni. Cerchiamo una $\varphi(x,u)$, analitica in un settore*

$$S_{\gamma,s,\rho} = \{(x,u) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^d \mid \left|\operatorname{Im} x^k\right| \leq \gamma \operatorname{Re} x^k,\ |x| \leq s,\ \|u\| \leq \rho\}, \tag{6.11}$$

tale che, se

$$\begin{cases} x_1^\varphi = f(x,u,\varphi(x,u)), \\ u_1^\varphi = g(x,u,\varphi(x,u)), \end{cases}$$

valga

$$\varphi(x_1^\varphi, u_1^\varphi) = h(x,u,\varphi(x,u)). \tag{6.12}$$

Ripetendo gli stessi cambi di variabile fatti nei precedenti capitoli

$$w = x^{-kB} v, \quad w_1 = x_1^{-kB} v_1,$$

definiamo H_1 come la mappa tale che

$$w - w_1 = x^{-kB} H_1(x,u,v).$$

Per le definizioni di x_1 e u_1 in (6.1), abbiamo che

$$\begin{aligned} x_1^{-B} &= \exp\left(-kB\log\left(x\left(1 - \frac{1}{k}x^k + O\left(\|U\|x^k, x^{2k}\log x\right)\right)\right)\right) \\ &= \exp\left(-kB\left(\log x + \log\left(1 - \frac{1}{k}x^k + O\left(\|U\|x^k, x^{2k}\log x\right)\right)\right)\right) \\ &= x^{-kB}\left[\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!}(-kB)^j\left(-\frac{1}{k}x^k + O\left(\|U\|x^k, x^{2k}\log x\right)\right)^j\right] \\ &= x^{-kB}\left[I - kB\left(-\frac{1}{k}x^k + O\left(\|U\|x^k, x^{2k}\log x\right)\right)\right] \\ &= x^{-kB}\left[\left(I + x^k B\right) + O\left(\|U\|x^k, x^{2k}\log x\right)\right], \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} w_1 &= x^{-kB}\left[\left(I + x^k B\right) + O\left(\|U\|x^k, x^{2k}\log x\right)\right] \\ &\quad \times \left[(I - x^k B)x^{kB} w + H(x,u,v)\right] \\ &= \left(I + O\left(\|U\|x^k, x^{2k}\log x\right)\right) w + x^{-kB}\left(I + O(x^k)\right) H(x,u,v). \end{aligned}$$

Quindi la funzione $H_1(x,u,v)$ soddisfa le stesse stime di $H(x,u,v)$. Infatti

$$H_1(x,u,v) = O\left(\|U\|^2 x^k, \|U\| x^{k+1}\log x\right).$$

e
$$H_1(x,u,0) = O\left(|x|^k \|U\|^m + |x|^N \|U\|\right).$$
Deduciamo che la relazione funzionale (6.12) è equivalente a
$$x^{-kB}\varphi(x,u) - x_1^{-kB}\varphi(x_1^\varphi, u_1^\varphi) = x^{-kB}H(x,u,\varphi(x,u)). \tag{6.13}$$

6.1 Operatore T

Siano $\{(x_n, u_n)\}$ le iterate della mappa
$$\begin{cases} x_1^\varphi = f(x,u,\varphi(x,u)) = x - \frac{1}{k}x^{k+1} + F(x,u,\varphi(x,u)), \\ u_1^\varphi = g(x,u,\varphi(x,u)) = \left(I_q - x^k A\right)u + G(x,u,\varphi(x,u)), \end{cases}$$
con f e g come in (6.1) e φ una funzione analitica nel settore $S_{\gamma,s,\rho}$, come in (6.11), a valori in $\mathbb{C}^{p-q-1}$. Ora prendiamo l'operatore
$$\mathrm{T}\,\varphi(x,u) = x^{kB}\sum_{n=0}^{\infty} x_n^{-kB} H_1(x_n, u_n, \varphi(x_n,u_n)).$$
Questo operatore ristretto ad un opportuno sottospazio chiuso $\mathcal{F}$ delle funzioni $\varphi : S_{\gamma,s,\rho} \to \mathbb{C}^{p-d-1}$ è una contrazione. Quindi esiste un unico punto fisso in $\mathcal{F}$, che, per come è stato costruito T, sarà una soluzione di (6.13). Procediamo nel seguente modo:

1. dimostriamo che esiste una costante K_0 tale che
$$\begin{aligned} \|\varphi(x,u)\| \le K_0\left(\|u\|^m + |x|^{k-1}\|u\|\right) \Longrightarrow \\ \|\mathrm{T}\,\varphi(x,u)\| \le K_0\left(\|u\|^m + |x|^{k-1}\|u\|\right). \end{aligned} \tag{6.14}$$

2. Se K_0 soddisfa la precedente condizione allora esistono delle costanti K_1 e K_2 tali che
$$\begin{aligned} &\begin{cases} \left|\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right| \le K_1(\|u\|^m |x|^{-1} + \|u\|\,|x|^{N-k-1}), \\ \left|\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right| \le K_2(\|u\|^{m-1} + |x|^{N-k}), \end{cases} \\ \Rightarrow &\begin{cases} \left|\frac{\partial\,\mathrm{T}\,\varphi}{\partial x}\right| \le K_1(\|u\|^m |x|^{-1} + \|u\|\,|x|^{N-k-1}), \\ \left|\frac{\partial\,\mathrm{T}\,\varphi}{\partial u}\right| \le K_2(\|u\|^{m-1} + |x|^{N-k}). \end{cases} \end{aligned} \tag{6.15}$$

3. Se consideriamo lo spazio di Banach $(F_0, \|\cdot\|_0)$ definito nel seguente modo
$$\begin{cases} F_0 = \{\varphi : S_{\gamma,s,\rho} \to \mathbb{C}^{p-d-1} \mid \exists K_0, K_1, K_2 \text{ tali che valgono (6.14) e (6.15)}\}, \\ \|\varphi\|_0 := \sup_{x,u}\{\frac{|\varphi(x,u)|}{(\|u\|^m + |x|^{k-1}\|u\|)}\}. \end{cases}$$
allora il sottoinsieme $\mathcal{F}$ di F_0 delle mappe φ che soddisfano le proprietà 1) e 2) con costanti K_0, K_1 e K_2 è chiuso.

4. Infine facciamo vedere che T è una contrazione.

Proposizione 6.6. *Se m e N sono degli interi tali che H_1 soddisfi la condizione (6.13), allora esiste una costante K_0 tale che, se*

$$\|\varphi(x,u)\| \leq K_0 \left(\|u\|^m + |x|^{N-k}\|u\|\right) \tag{6.16}$$

allora valgono le seguenti proprietà:

1. *la serie che definisce l'operatore* T *è uniformemente convergente in* $S_{\gamma,s,\rho} \cap \{\|u\|\,|x|^{-\alpha}\}$*;*
2. *anche* $\|\mathrm{T}\,\varphi(x,u)\|$ *soddisfa la stessa diseguaglianza*

$$\|\mathrm{T}\,\varphi(x,u)\| \leq K_0 \left(\|u\|^m + |x|^{N-k}\|u\|\right).$$

Dimostrazione. Siccome A ha soltanto autovalori con parte reale strettamente positiva, come visto nel Teorema 5.1, per ogni $(x,u) \in S_{\gamma,s,\rho}$ si ha che

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n\|\,|x_n|^{-\alpha} = 0.$$

Quindi senza perdita di generalità possiamo supporre che la quantità $\|u\|\,|x|^{-\alpha}$ sia limitata da 1. Sia $\beta < \alpha$ un numero reale tale che ogni autovalore di B soddisfi la disuguaglianza $\mathrm{Re}\,\mu_j < \beta$. Per il Lemma 4.4, questa condizione implica che esiste una costante C_1 tale che

$$\|x^{kB}x_n^{-kB}\| \leq C_1 \left|\frac{x_n}{x}\right|^{-k\beta}.$$

Inoltre, per quanto è stato dimostrato in precedenza, scegliendo γ, s, ρ abbastanza piccoli, se (x,u) sta in $S_{\gamma,s,\rho}$, allora

$$\left|x_n^k\right| \leq \frac{2}{n}, \quad \|u_n\| \leq \|u\|\,|x|^{-k\mu}\,|x_n|^{k\mu}.$$

Per le limitazioni fatte su $H_1(x,u,v)$ esistono delle costanti K_1 e K_2 tali che, per un certo intero q,

$$\begin{aligned}\|H_1(x,u,v)\| \leq{}& K_1\left(\|u\|^m|x|^k + |x|^N\|u\|\right)\\ &+ \underbrace{K_2\left(\|v\|\,|x|^{k+1}\,|\log|x||^q + \|v\|^2|x|^k + \|u\|\|v\|\,|x|^k\right)}_{(*)}.\end{aligned} \tag{6.17}$$

Supponiamo valga $\|\varphi(x,u)\| \leq K\left(\|u\|^m + |x|^{N-k}\|u\|\right)$, per una certa costante K. Per $v = \varphi(x,u)$ vale che

$$(*) = O\left(\|u\| + |x|\,|\log|x||^q\right)\left(|x|^k\|u\|^m + |x|^N\|u\|\right).$$

Quindi, prendendo s e ρ sufficientemente piccoli,

$$\|H_1(x,u,v)\| \leq (K_1+1)\left(|x|^k\|u\|^m + |x|^N\|u\|\right).$$

Quindi

$$\begin{aligned}\|\mathrm{T}\,\varphi(x,u)\| &\leq \sum_{n=0}^{\infty}\|\Big(\frac{x_n}{x}\Big)^{-kB} H_1(x_n,u_n,\varphi(x_n,u_n))\| \\ &\leq (K_1+1)\sum_{n=0}^{\infty}\Big|\frac{x_n}{x}\Big|^{-k\beta}\left(|x_n|^k\|u_n\|^m + |x_n|^N\|u_n\|\right) \\ &\leq (K_1+1)\sum_{n=0}^{\infty}\Big|\frac{x_n}{x}\Big|^{-k\beta}\left(|x_n|^{k+k\mu m}\|u\|^m|x|^{-k\mu m} + |x_n|^{N+k\mu}\|u\|\,|x|^{-k\mu}\right).\end{aligned}$$

Siccome $\alpha > \beta$, la serie è normalmente convergente nell'insieme $\{\|u\|\,|x|^{-k\alpha} \leq 1\}$. Per il corollario 4.2 esiste una costante K_0 che dipende solo da H_1 tale che

$$\|\mathrm{T}\,\varphi(x,u)\| \leq K_0\left(\|u\|^m + |x|^{N-k}\|u\|\right).$$

Quindi prendendo $K = K_0$ abbiamo concluso la dimostrazione. □

Sia $\mathcal{F}_0$ l'insieme delle funzioni definite su $S_{\gamma,s,\rho}$ tali che la condizione (6.16) sia soddisfatta con la costante K_0 della proposizione 6.6. Per quanto appena dimostrato T manda $\mathcal{F}_0$ in $\mathcal{F}_0$. Siccome vogliamo che T sia una contrazione, dobbiamo imporre delle altre restrizioni. Cominciamo riducendo il dominio di definizione delle funzioni di $\mathcal{F}_0$.

6.1.1 Scelta del dominio di definizione $\mathcal{D}$.

Nel seguito, invece di $S_{\gamma,s,\rho}$, useremo come dominio di definizione delle funzioni φ il seguente insieme

$$\mathcal{D} := S_{\gamma,s,\rho} \cap \{(x,u) \mid \|u\|\,|x|^{-\alpha} \leq 1\},$$

e $\mathcal{F}_0$ sarà l'insieme dell funzioni $\varphi : \mathcal{D} \to \mathbb{C}^r$ che soddisfano la condizione (6.16). Mostreremo un analogo della proposizione 6.6 per le derivate parziali di φ. Per questo sarà necessario avere dei limiti sulle due serie

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left\|\frac{\partial}{\partial x}\{\Big(\frac{x_n}{x}\Big)^{-kB} H_1(x_n,u_n,\varphi(x_n,u_n))\}\right\|$$

e

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left\|\frac{\partial}{\partial u}\{\Big(\frac{x_n}{x}\Big)^{-kB} H_1(x_n,u_n,\varphi(x_n,u_n))\}\right\|$$

Quindi dobbiamo controllare le derivate parziali $\left|\frac{\partial x_n}{\partial x}\right|$, $\left\|\frac{\partial u_n}{\partial x}\right\|$, $\left\|\frac{\partial x_n}{\partial u}\right\|$ e $\left\|\frac{\partial u_n}{\partial u}\right\|$. Questo verrà fatto nel seguente lemma.

Lemma 6.7. *Sia $\delta = min\{k\alpha, k\}$ e sia ϵ reale positivo, con $\epsilon < \delta$. Allora, per γ, s e ρ abbastanza piccoli, valgono le seguenti disuguaglianze in $\mathcal{D}$:*

$$\left|\frac{\partial x_n}{\partial x}\right| \leq \left|\frac{x_n}{x}\right|^{1+\delta-2\epsilon}, \qquad \left\|\frac{\partial u_n}{\partial x}\right\| \leq \frac{\|u\|\,|x_n|^{\delta-\epsilon}}{|x|^{1+\delta-2\epsilon}},$$

e

$$\left\|\frac{\partial x_n}{\partial u}\right\| \leq \frac{|x_n|^{1+\delta-2\epsilon}}{|x|^{\delta-\epsilon}}, \qquad \left\|\frac{\partial u_n}{\partial u}\right\| \leq \left|\frac{x_n}{x}\right|^{\delta-\epsilon}.$$

Dimostrazione. Dimostremo il lemma per induzione su n. Se $n = 1$, derivando $x_1 = x - \frac{1}{k}x^{k+1} + O\left(x^{2k+1}, \|u\|x^{k+1}\log x\right)$ e $u_1 = (I - x^k A)u + O\left(\|u\|^2 x^k, \|u\|x^{k+1}\log x\right)$ rispetto ad x ed u, otteniamo

$$\left|\frac{\partial x_1}{\partial x}\right| = \left|1 - \frac{k+1}{k}x^k + o(x^k)\right| \leq \left|\frac{x_1}{x}\right|^{k+1-\epsilon},$$

poiché $\left|\frac{|x_1|}{|x|}\right|^{k+1-\epsilon} = \left|1 - \frac{k+1-\epsilon}{k}x^k + o(x^k)\right|$, e

$$\left\|\frac{\partial u_1}{\partial x}\right\| \leq K\|u\|\,|x|^{k-1}.$$

Inoltre

$$\left\|\frac{\partial x_1}{\partial u}\right\| \leq K\,|x|^{k+1} \leq \left|\frac{|x_1|^{1+\delta-\epsilon}}{|x|^{\delta-\epsilon}}\right|, \qquad \left\|\frac{\partial u_1}{\partial u}\right\| \leq \left|1 - \alpha x^k\right| \leq \left|\frac{x_1}{x}\right|^{\delta-\epsilon},$$

per una scelta di γ, s e ρ abbastanza piccoli. Dalla definizione di Φ ricaviamo

$$\left|\frac{\partial x_{n+1}}{\partial x}\right| \leq \left|1 - \frac{k+1}{k}x_n^k + o(x_n^k)\right|\left|\frac{\partial x_n}{\partial x}\right| + K\,|x_n|^{k+1}\left\|\frac{\partial u_n}{\partial x}\right\|,$$

e

$$\left\|\frac{\partial u_{n+1}}{\partial x}\right\| \leq K\|u_n\|\left|\frac{\partial x_n}{\partial x}\right| + \left|1 - \alpha x_n^k\right|\left\|\frac{\partial u_n}{\partial x}\right\|.$$

Quindi, per ipotesi induttiva,

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial x_{n+1}}{\partial x}\right| &\leq \left|\frac{x_n}{x}\right|^{1+\delta-2\epsilon}\left(1 - \frac{k+1}{k}\mathrm{Re}\,x_n^k + o(x_n^k) + K\|u\|\,|x_n|^{1+\epsilon}\right)\\ &\leq \left|\frac{x_{n+1}}{x}\right|^{1+\delta-2\epsilon} = \left|1 - \frac{1+\delta-2\epsilon}{k}x_n^k + o(x_n^k)\right|,\end{aligned}$$

siccome $1 + \delta - 2\epsilon < \frac{k+1}{k}$. Invece, usando l'ipotesi induttiva e la disuguaglianza $\|u_n\| \leq \|u\|\,|x|^{-k\alpha}\,|x_n|^{k\alpha}$, otteniamo

$$\left\|\frac{\partial u_{n+1}}{\partial x}\right\| \leq \frac{\|u\|}{|x|^{1+\delta-2\epsilon}}\,|x_n|^{\delta-\epsilon}\left(1 - \alpha\mathrm{Re}\,x_n^k + o(x_n^k) + K\,|x|^{-\alpha}\,|x_n|^{1+\alpha-\epsilon}\right),$$

che è più piccolo di $\frac{\|u\|}{|x|^{1+\delta-2\epsilon}} |x_{n+1}|^{\delta-\epsilon}$, siccome $\delta - \epsilon < k\alpha$. Analogamente per induzione dimostriamo anche le disuguglianze per le derivate parziali rispetto a u. Infatti

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{\partial x_{n+1}}{\partial u} \right\| &\leq \left| 1 - \frac{k+1}{k} x_n^k + o(x_n^k) \right| \left| \frac{\partial x_n}{\partial u} \right| + K |x_n|^{k+1} \| \frac{\partial u_n}{\partial u} \| \\
&\leq \left| \frac{|x_n|^{k+1-2\epsilon}}{|x|^{\delta-\epsilon}} \right| \left[1 - \frac{k+1}{k} x_n^k + o(x_n^k) + K |x_n|^{\delta+\epsilon} \right] \\
&\leq \frac{|x_n|^{k+1-2\epsilon}}{|x|^{\delta-\epsilon}},
\end{aligned}$$

poiché $\delta + 1 - \epsilon < k + 1$, e

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{\partial u_{n+1}}{\partial u} \right\| &\leq K \|u_n\| \left\| \frac{\partial x_n}{\partial u} \right\| + \left| 1 - \alpha x_n^k \right| \left\| \frac{\partial u_n}{\partial u} \right\| \\
&\leq \left| \frac{x_n}{x} \right|^{\delta-\epsilon} \left[1 - \alpha \mathrm{Re}\, x_n^k + o(x_n^k) K \|u\| \frac{|x_n|^{2k+k\alpha-\delta}}{|x|^{k\alpha}} \right] \\
&\leq \left| \frac{x_{n+1}}{x} \right|^{\delta-\epsilon},
\end{aligned}$$

poiché $\delta - \epsilon < k\alpha$. Abbiamo concluso la dimostrazione. □

Proposizione 6.8. *Sia φ in $\mathcal{F}_0$. Esistono delle costanti K_1 e K_2 tali che, se*

$$\begin{cases} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right| \leq K_1 \left(\|u\|^m |x|^{-1} + |x|^{N-k-1} \|u\| \right), \\ \left| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right| \leq K_2 \left(\|u\|^{m-1} + |x|^{N-k} \right), \end{cases} \tag{6.18}$$

allora valgono le stesse disuguaglianze per $\| \frac{\partial \, \mathrm{T} \varphi}{\partial x} \|$ e $\| \frac{\partial \, \mathrm{T} \varphi}{\partial u} \|$.

Dimostrazione. Cominciamo con le stime sulle norme delle derivate parziali di H_1. Esistono delle costanti C_1 e C_2 tali che

$$\begin{aligned}
\|H_1(x,u,v)\| \leq C_1 &\left(\|u\|^m |x|^k + |x|^N \|u\| \right) \\
&+ C_2 \left(\|v\| |x|^{k+1} |\log |x||^q + \|v\|^2 |x|^k + \|u\| \|v\| |x|^k \right).
\end{aligned}$$

Di consseguenza esistono delle costanti C_3 e C_4 tali che la norma della derivata parziale di H_1 rispetto ad x sia

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{\partial H_1}{\partial x} \right\| \leq C_3 &\left(\|u\|^m |x|^{k-1} + |x|^{N-1} \|u\| \right) \\
&+ C_4 \left(\|v\| |x|^k |\log |x||^q + \|v\|^2 |x|^{k-1} + \|u\| \|v\| |x|^{k-1} \right).
\end{aligned}$$

Derivando rispetto ad u otteniamo

$$\left\| \frac{\partial H_1}{\partial u} \right\| \leq C_5 \left(\|u\|^{m-1} |x|^k + |x|^N \right) + C_6 \|v\| \, |x|^k ,$$

per delle costanti C_5 e C_6. Infine esistono costanti C_7 e C_8 tali che possiamo stimare la norma della derivata rispetto alla coordinata v come

$$\left\| \frac{\partial H_1}{\partial v} \right\| \leq C_7 \left(|x|^{k+1} |\log |x||^q + \|v\| \, |x|^k + \|u\| \, |x|^k \right) \leq C_8 \, |x|^k .$$

Supponiamo esistano due costanti K e K' tali che

$$\begin{cases} \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right\| \leq K \left(\|u\|^m |x|^{-1} + |x|^{N-k-1} \|u\| \right), \\ \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right\| \leq K' \left(\|u\|^{m-1} + |x|^{N-k} \right). \end{cases}$$

Possiamo stimare $\|\frac{\partial \, \mathrm{T} \, \varphi}{\partial x}\|$ ottenendo

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial \, \mathrm{T} \, \varphi}{\partial x} \right\| &\leq \sum_{n=0}^{\infty} \left\| \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \left(\frac{x_n}{x} \right)^{-kB} H_1(x_n, u_n, \varphi(x_n, u_n)) \right\} \right\| \\ &\leq \sum_{n=0}^{\infty} \Bigg[\underbrace{\left\| \frac{\partial}{\partial x} \left(\left(\frac{x_n}{x} \right)^{-kB} \right) \right\| \|H_1(x_n, u_n, \varphi(x_n, u_n))\|}_{S_1} \\ &\qquad + \left\| \left(\frac{x_n}{x} \right)^{-kB} \right\| \left[\underbrace{\left| \frac{\partial H_1}{\partial x} \right| \left| \frac{\partial x_n}{\partial x} \right|}_{S_2} + \underbrace{\left| \frac{\partial H_1}{\partial u} \right| \left| \frac{\partial u_n}{\partial x} \right|}_{S_3} \right] \\ &\qquad + \left\| \left(\frac{x_n}{x} \right)^{-kB} \right\| \underbrace{\left| \frac{\partial H_1}{\partial v} \right| \left[\left| \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right| \left| \frac{\partial x_n}{\partial x} \right| + \left| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right| \left| \frac{\partial u_n}{\partial x} \right| \right]}_{S_4} \Bigg]. \end{aligned}$$

Utilizziamo il lemma 6.7 per stimare S_1, S_2, S_3 e S_4. Infatti

$$\begin{aligned} S_1 \leq \|-kB\| \left| \frac{x_n}{x} \right|^{-k\beta} &\left[\frac{1}{|x_n|} \left| \frac{x_n}{x} \right|^{1+\delta-\epsilon} + \frac{1}{|x|} \right] \left(\|u_n\|^m |x_n|^{-1} + |x_n|^{N-K-1} \|u_n\| \right) \\ &\times |x_n|^{k+1} \left[C_1 + C_2 K_0 \left(|x_n| \, |\log |x_n||^q + \|\varphi(x_n, u_n)\| + \|u_n\| \right) \right]. \end{aligned}$$

Allo stesso modo

$$\begin{aligned}
S_2 \leq & \Bigg[C_3 \left(\|u_n\|^m |x_n|^{k-1} + |x_n|^{N-1} \|u_n\| \right) + C_4 \|\varphi(x_n, u_n)\| \, |x_n|^{k-1} \\
& \quad \times \left(|x_n| \, |\log |x_n||^q + \|\varphi(x_n, u_n)\| + \|u_n\| \right) \Bigg] \left| \frac{x_n}{x} \right|^{1+\delta-\epsilon} \\
\leq & \left(\|u_n\|^m |x_n|^{-1} + |x_n|^{N-k-1} \|u_n\| \right) |x_n|^k \\
& \times \left[C_3 + C_4 \left(|x_n| \, |\log |x_n||^q + \|\varphi(x_n, u_n)\| + \|u_n\| \right) \right] \left| \frac{x_n}{x} \right|^{1+\delta-\epsilon},
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
S_3 \leq & \left[C_5 \left(\|u_n\|^{m-1} |x_n|^k + |x_n|^N \right) + C_6 \|\varphi(x_n, u_n)\| \, |x_n|^k \right] \frac{\|u\| \, |x_n|^{\delta-\epsilon}}{x^{1+\delta-\epsilon}} \\
\leq & \left(\|u_n\|^m |x_n|^{-1} + |x_n|^{N-k-1} \|u_n\| \right) |x_n|^k \left[C_5 \frac{|x_n|}{\|u_n\|} + C_6 |x_n| \right] \frac{\|u\| \, |x_n|^{\delta-\epsilon}}{x^{1+\delta-\epsilon}}.
\end{aligned}$$

Infine

$$\begin{aligned}
S_4 \leq & \, C_8 |x_n|^k \Bigg[K \left(\|u_n\|^m |x_n|^{-1} + |x_n|^{N-k-1} \|u_n\| \right) \left| \frac{x_n}{x} \right|^{1+\delta-\epsilon} \\
& \quad + K' \left(\|u_n\|^{m-1} + |x_n|^{N-k} \right) \frac{\|u\| \, |x_n|^{\delta-\epsilon}}{|x|^{1+\delta-\epsilon}} \Bigg] \\
\leq & \, C_8 \left(\|u_n\|^m |x_n|^{-1} + |x_n|^{N-k-1} \|u_n\| \right) |x_n|^k \\
& \times \left[K \left| \frac{x_n}{x} \right|^{1+\delta-\epsilon} + K' \frac{\|u\| \, |x_n|^{\delta-\epsilon}}{\|u_n\| \, |x|^{1+\delta-\epsilon}} \right].
\end{aligned}$$

Ricordiamo che, per il corollario 4.2, è possibile stimare le serie trovate nel seguente modo

$$\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^{\mu} |\log x_n|^q \leq C_{\mu,q} |x|^{\mu-k} |\log x|^q ,$$

per una certa costante $C_{\mu,q}$. Quindi esiste una costante K_1, che dipende soltanto da H_1, tale che

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{\partial \, \mathrm{T} \, \varphi}{\partial x} \right\| \leq & \left[S_1 + \left| \frac{x_n}{x} \right|^{-k\beta} (S_2 + S_3 + S_4) \right] \\
\leq & \, K_1 \left(\|u\|^m |x|^{-1} + |x|^{N-k-1} \|u\| \right).
\end{aligned}$$

Prendendo $K = K_1$ abbiamo dimostrato la prima disuguaglianza. Analogamente a quanto appena fatto stimiamo $\left\|\frac{\partial \mathrm{T}\varphi}{\partial u}\right\|$ ottenendo

$$\begin{aligned}
\left\|\frac{\partial \mathrm{T}\varphi}{\partial u}\right\| &\leq \sum_{n=0}^{\infty}\left\|\frac{\partial}{\partial u}\left\{\left(\frac{x_n}{x}\right)^{-kB} H_1(x_n, u_n, \varphi(x_n, u_n))\right\}\right\| \\
&\leq \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\left\|\frac{\partial}{\partial u}\left(\left(\frac{x_n}{x}\right)^{-kB}\right)\right\| \|H_1(x_n, u_n, \varphi(x_n, u_n))\|}_{(i)} \\
&\qquad + \left\|\left(\frac{x_n}{x}\right)^{-kB}\right\| \underbrace{\left\|\frac{\partial}{\partial u}\left(H_1(x_n, u_n, \varphi(x_n, u_n))\right)\right\|}_{(ii)}.
\end{aligned}$$

Per quanto riguarda il primo termine

$$\begin{aligned}
(i) &\leq \left\|-kB\frac{1}{x_n}\frac{\partial x_n}{\partial u}\left(\frac{x_n}{x}\right)^{-kB}\right\| \left(\|u_n\|^{m-1} + |x_n|^{N-k}\right)|x_n|^k \\
&\quad \times \underbrace{\Big[C_1\|u_n\| + C_2\|u_n\|\left(|x_n|\,|\log|x_n||^q + \|\varphi(x_n, u_n)\| + \|u_n\|\right)\Big]}_{\tilde{K}(x_n, u_n)} \\
&\leq \tilde{C}\left|\frac{1}{x_n}\right|\left|\frac{\partial x_n}{\partial u}\right|\left|\frac{x_n}{x}\right|^{-k\beta}\left(\|u_n\|^{m-1} + |x_n|^{N-k}\right)|x_n|^k\,\tilde{K}(x_n, u_n).
\end{aligned}$$

Il secondo termine comprende le derivate parziali di H_1 rispetto alle coordinate x, u e v che abbiamo analizzato all'inizio della dimostrazione e di conseguenza

$$
\begin{aligned}
(ii) \leq & \left|\frac{\partial H_1}{\partial x}(x_n, u_n, \varphi(x_n, u_n))\right| \left|\frac{\partial x_n}{\partial u}\right| + \left|\frac{\partial H_1}{\partial u}(x_n, u_n, \varphi(x_n, u_n))\right| \left|\frac{\partial u_n}{\partial u}\right| \\
& + \left|\frac{\partial H_1}{\partial v}(x_n, u_n, \varphi(x_n, u_n))\right| \\
& \times \left[\left|\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_n, u_n, \varphi(x_n, u_n))\right| \left|\frac{\partial x_n}{\partial u}\right| + \left|\frac{\partial \varphi}{\partial u_n}(x_n, u_n, \varphi(x_n, u_n))\right| \left|\frac{\partial u_n}{\partial u}\right|\right] \\
\leq & \Bigg[C_3 \left(\|u_n\|^m |x_n|^{k-1} + |x_n|^{N-1} \|u_n\|\right) + C_4 \|\varphi(x_n, u_n)\| \, |x_n|^{k-1} \\
& \quad \times (|x_n| \, |\log |x_n||^q + \|\varphi(x_n, u_n)\| + \|u_n\|)\Bigg] \frac{|x_n|^{1+\delta-\epsilon}}{|x|^{\delta-\epsilon}} \\
& + \left[C_5 \left(\|u_n\|^{m-1} |x_n|^k + |x_n|^N\right) + C_6 \|\varphi(x_n, u_n)\| \, |x_n|^k\right] \left|\frac{x_n}{x}\right|^{\delta-\epsilon} \\
& + C_8 |x_n|^k \Bigg[K \left(\|u_n\|^m |x_n|^{-1} + |x_n|^{N-k-1} \|u_n\|\right) \frac{|x_n|^{1+\delta-\epsilon}}{|x|^{\delta-\epsilon}} \\
& \qquad + K' \left(\|u_n\|^{m-1} + |x_n|^{N-k}\right) \left|\frac{x_n}{x}\right|^{\delta-\epsilon}\Bigg] \\
= & \left(\|u_n\|^{m-1} + |x_n|^{N-k}\right) |x_n|^k \Bigg[\Big[C_3 \|u_n\| + C_4 K_0 \|u_n\| \\
& \times (|x_n| \, |\log |x_n||^q + \|\varphi(x_n, u_n)\| + \|u_n\|)\Big] \frac{|x_n|^{\delta-\epsilon}}{|x|^{\delta-\epsilon}} \\
& + \Big[C_5 + C_6 K_0 \|u_n\|\Big] \left|\frac{x_n}{x}\right|^{\delta-\epsilon} \\
& + C_8 \Big[K \|u_n\| \, |x_n|^{-1} \frac{|x_n|^{1+\delta-\epsilon}}{|x|^{\delta-\epsilon}} + K' \left|\frac{x_n}{x}\right|^{\delta-\epsilon}\Big]\Bigg] \\
\leq & \bar{K}(x_n, u_n, x) \left(\|u_n\|^{m-1} + |x_n|^{N-k}\right) |x_n|^k .
\end{aligned}
$$

Quindi

$$
\begin{aligned}
\left\|\frac{\partial \mathrm{T} \varphi}{\partial u}\right\| & \leq \sum_{n=0}^{\infty} \left[(i) + \left|\frac{x_n}{x}\right|^{-k\beta} (ii)\right] \\
& \leq K_2 \left(\|u\|^{m-1} + |x|^{N-k}\right),
\end{aligned}
$$

e la costante K_2 dipende soltanto da H_1. Prendendo $K' = K_2$ possiamo concludere la dimostrazione. $\square$

6.1.2 Definizione di $\mathcal{F}$

Rimane solamente da trovare un certo sottoinsieme di funzioni rispetto al quale T sia una contrazione. Siano m e N interi che soddisfano (6.12). Sia F_0 lo spazio di Banach delle funzioni olomorfe φ, definite su $S_{\gamma,s,\rho}$, tali che

$$\|\varphi\|_0 := \sup_{x,u} \left\{ \frac{\|\varphi(x,u)\|}{\|u\|^m + |x|^{N-k} \|u\|} \right\}$$

è limitata, dotato della norma $\|\varphi\|_0$. Definiamo $\mathcal{F}$ come il sottoinsieme chiuso di F_0 delle funzioni che soddisfano le disuguaglianze (6.16) e (6.18), con le costanti K_0, K_1 e K_2 fornite dalle proposizioni 6.6 e 6.8.

Proposizione 6.9. *Se $\mathcal{F}$ il sottoinsieme appena definito, allora l'operatore* T *ristretto a $\mathcal{F}$ è una contrazione.*

Dimostrazione. Siano φ e ψ due funzioni in $\mathcal{F}$. Vogliamo controllare la variazione

$$S := \left\| \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x_n}{x}\right)^{-kB} H_1(x_n, u_n, \varphi(x_n, u_n)) - \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x'_n}{x}\right)^{-kB} H_1(x'_n, u'_n, \psi(x'_n, u'_n)) \right\|,$$

dove (x_n, u_n) e (x'_n, u'_n) sono le iterate del punto (x, u) tramite l'applicazione (6.1) rispettivamente con funzioni φ e ψ. Possiamo limitare S con la somma di S_1 e S_2, date da

$$S_1 := \left\| \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x_n}{x}\right)^{-kB} H_1(x_n, u_n, \varphi(x_n, u_n)) - \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x_n}{x}\right)^{-kB} H_1(x_n, u_n, \psi(x_n, u_n)) \right\|,$$

e

$$S_2 := \left\| \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x_n}{x}\right)^{-kB} H_1(x_n, u_n, \psi(x_n, u_n)) - \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x'_n}{x}\right)^{-kB} H_1(x'_n, u'_n, \psi(x'_n, u'_n)) \right\|.$$

Il primo termine S_1 si controlla facilmente. Da (6.17) abbiamo che, per un intero q,

$$S_1 \leq C \sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{x_n}{x}\right|^{-k\beta} \left(\|u_n\|^m + |x_n|^{N-k} \|u_n\|\right) \left(|x_n|^{k+1} |\log x_n|^q + |x_n|^k\right) \|\varphi - \psi\|_0.$$

Per il corollario 4.2 e la disuguaglianza $\|u_n\| \leq \|u\| \, |x_n|^{k\alpha} \, |x|^{-k\alpha}$, otteniamo

$$S_1 \leq C' \left(\|u\|^m + |x|^{N-k} \|u\|\right) (|x| \, |\log x|^q + \|u\|) \, \|\varphi - \psi\|_0.$$

Per limitare il termine S_2 dobbiamo stimare la dipendenza della successione $\{(x_n, u_n)\}$ in φ nell'equazione (6.1).

Lemma 6.10. *Sia* $\delta = \min\{k\alpha, k\}$*. Sia* ϵ *un intero positivo, tale che* $\epsilon < \delta$ *e* $\operatorname{Re}\alpha_j > \alpha + \epsilon$ *per ogni autovalore* λ_j *di* A*. Siano* φ *e* ψ *due funzioni in* $\mathcal{F}$*, e siano* $\{(x_n, u_n)\}$ *e* $\{(x_n', u_n)'\}$ *le iterate tramite l'applicazione 6.1 rispettivamente associate a* φ *e* ψ*. Allora per* γ, s *e* ρ *abbastanza piccoli, abbiamo le seguenti stime su* $S_{\gamma,s,\rho}$*:*

$$\left|x_n - x_n'\right| \leq |x_n|^{1+\delta-\epsilon} |x|^{-\delta} (\|u\|^m + |x|\, N - k\|u\|)\|\varphi - \psi\|_0,$$

e

$$\|u_n - u_n'\| \leq |x_n|^{\delta} |x|^{-\delta} (\|u\|^m + |x|^{N-k} \|u\|)\|\varphi - \psi\|_0.$$

Dimostrazione. Useremo le seguenti notazioni: $\Delta x_n = |x_n - x_n'|$, $\Delta u_n = \|u_n - u_n'\|$ e $\Delta\varphi(x, u) = (\|u\|^m + |x|^{N-k} \|u\|)\|\varphi - \psi\|_0$. Dimostremo il lemma per induzione su n. Se $n = 1$, per le equazioni (6.1), abbiamo che esiste una costante K tale che

$$\begin{cases} \Delta x_1 \leq K\, |x|^{k+1} \Delta\varphi(x, u), \\ \Delta u_1 \leq K \left(|x|^{k+1} + |x|^k \|u\|\right) \Delta\varphi(x, u), \end{cases}$$

per γ, s abbastanza piccoli. Supponiamo che le disuguaglianze valgano per n e dimostriamole per $n + 1$. Siccome x_n^k e $(x_n)'$ sono entrambi equivalenti a $\frac{1}{n}$, abbiamo che $(x_n)' = x_n^k + o(x_n^k)$. Per definizione di Φ abbiamo che

$$\begin{aligned} \Delta x_{n+1} &= \left|x_n^k \left(1 - x_n^k + O\left(x_n^{2k}, \|u\|x_n^k\right)\right) - (x_n')^k \left(1 - (x_n')^k + O\left((x_n')^{2k}, \|u\|(x_n')^k\right)\right)\right| \\ &\leq \Delta x_n \left|1 - x_n^k + o(x_n^k)\right| + K\, |x_n|^{k+1} \Delta u_n + K\, |x_n|^{k+1} \Delta\varphi(x_n, u_n), \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \Delta u_{n+1} \leq{}& K\|u_n\|\Delta x_n + |1 - (\alpha + \epsilon)x_n + o(x_n)|\, \Delta u_n \\ &+ K \left(|x_n|^{k+1} + \|u_n\|\, |x_n|^k\right) \Delta\varphi(x_n, u_n). \end{aligned}$$

Per la disuguaglianza $\|u_n\| \leq \|u\| \left|\frac{x_n}{x}\right|^{k\alpha}$, abbiamo che

$$\Delta\varphi(x_n, u_n) \leq \left(\|u\|^m + |x|^{N-k} \|u\|\right) \left(\left|\frac{x_n}{x}\right|^{mk\alpha} + \left|\frac{x_n}{x}\right|^{k\alpha+N-k}\right) \|\varphi - \psi\|_0,$$

e, siccome $\left|\frac{x_n}{x}\right|^{\gamma} \leq \left|\frac{x_n}{x}\right|^{\delta}$ quando $\gamma < \delta$,

$$|x|^{\delta} \Delta\varphi(x_n, u_n) \leq 2\, |x_n|^{\delta} \Delta\varphi(x, u).$$

Per ipotesi induttiva, possiamo limitare $|x|^{\delta} \frac{\Delta x_{n+1}}{\Delta\varphi}$ e $|x|^{\delta} \frac{\Delta u_{n+1}}{\Delta\varphi}$. Otteniamo che

$$\begin{aligned} |x|^{\delta} \frac{\Delta x_{n+1}}{\Delta\varphi} &\leq \left|1 - \epsilon x_n^k + o(x_n^k)\right| |x_{n+1}|^{1+\delta-\epsilon} + K\, |x_n|^{2+\delta} + 2K\, |x_n|^{2+\delta} \\ &\leq \left|1 - \epsilon x_n^k + o(x_n^k)\right| |x_{n+1}|^{1+\delta-\epsilon} \leq |x_{n+1}|^{1+\delta-2\epsilon}, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}|x|^\delta \frac{\Delta u_{n+1}}{\Delta\varphi} &\le K\|u_n\|\,|x_n|^{1+\delta-\epsilon} + \left|1-\epsilon x_n^k + o(x_n^k)\right| |x_{n+1}|^\delta + K\left(|x_n| + \|u_n\|\right)|x_n|^{1+\delta} \\ &\le \left|1-\epsilon x_n^k + o(x_n^k)\right| |x_{n+1}|^\delta \le |x_{n+1}|^\delta .\end{aligned}$$

Usando che $\|u_n\|\,|x_n|^{-k\alpha} = o(1)$, dimostriamo anche l'ultima disuguaglianza

$$\|u_n\|\,|x_n|^{1+\delta-\epsilon} = o(|x_n|^{1+k\alpha+\delta-\epsilon}) = |x_n|^\delta\, o(|x_n|),$$

per ϵ abbastanza piccolo. □

Ora possiamo dare una stima per S_2. Abbiamo che

$$\begin{aligned}S_2 \le \sum_{n=0}^{\infty} K_1 \left|\frac{x_n}{x}\right|^{-\beta-\epsilon} &\left(\|u_n\|^m + |x_n|^{N-k}\|u_n\|\right)\Delta x_n \\ + K_2 \left|\frac{x_n}{x}\right|^{-\beta-\epsilon} &\left(\|u_n\|^{m-1}|x_n|^k + |x_n|^{N-k}\right)\Delta u_n.\end{aligned}$$

Usando il lemma 6.10, il corollario 4.2 e il fatto che $\|u_n\|\,|x_n|^{-\epsilon} = o(1)$, otteniamo che

$$S_2 \le K\left(\|u\|^{m-1} + |x_n|^{N-k}\right)\left(\|u\|^m + |x|^{N-k}\|u\|\right)\|\varphi-\psi\|_0.$$

Quindi T è una contrazione. □

In [H2] è possibile trovare una dimostrazione del seguente corollario.

Corollario 6.11. *Sia Φ un germe di $(\mathbb{C}^p, 0)$ tangente all'identità e sia V una direzione caratteristica non degenere. Siano $\{\lambda_j\}$ gli autovalori della matrice A associata a V che hanno parte reale strettamente positiva e supponiamo che gli $\alpha_j = \operatorname{Re}\lambda_j$ soddisfino*

$$\alpha_1 > \alpha_2 > \cdots > \alpha_h > 0.$$

Allora esiste una successione crescente

$$M_1 \subset M_2 \subset \cdots \subset M_h$$

di varietà paraboliche, definite in un settore, che sono attratte dall'origine lungo la direzione V. Inoltre, per ogni $1 \le i \le h$, la dimensione di M_i è pari a $1 + \sum_{\operatorname{Re}\lambda_j \ge \alpha_i} m_{alg}(\lambda_j)$ e M_i è tangente nell'origine a $\mathbb{C}V \bigoplus_{\operatorname{Re}\lambda_j \ge \alpha_i} E_{\lambda_j}$, dove E_{λ_j} è l'autospazio associato all'autovalore λ_j.

6.2 Conclusioni

Trovata la φ come punto fisso di T, possiamo eseguire il seguente cambio di variabile: $\tilde{v} = v - \varphi(x, u)$.

$$\begin{aligned}
\tilde{v}_1 &= v_1 - \varphi(x_1, u_1) = (I - x^k B)v + H(x, u, v) - \varphi(x_1, u_1) \\
&= (I - x^k B)(\tilde{v} + \varphi(x, u)) + H(x, u, \tilde{v} + \varphi(x, u)) - \varphi(x_1, u_1) \\
&= (I - x^k B)\tilde{v} + \underbrace{(I - x^k B)\varphi(x, u) + H(x, u, \varphi(x, u))}_{=\varphi(x_1^\varphi, u_1^\varphi)} \\
&\quad + \sum_{n\geq 1} \left[\frac{1}{n!} \frac{\partial^n H}{\partial v^n}(x, u, \varphi(x, u))\tilde{v}^n \right] - \varphi(x_1, u_1) \\
&= (I - x^k B)\tilde{v} + \varphi(x_1^\varphi, u_1^\varphi) + \tilde{v}\tilde{H}(x, u, \varphi(x, u)) - [\varphi(x_1^\varphi, u_1^\varphi) + \cdots] \\
&= (I - x^k B)\tilde{v} + \underbrace{\tilde{v}\tilde{H}(x, u, \tilde{v})}_{H(x,u,\tilde{v})}.
\end{aligned}$$

Dopo questo cambio di coordinate, abbiamo che $H(x, u, 0) = 0$. Quindi possiamo assumere, senza perdita di generalità, che la terza coordinata di (6.2) soddisfi

$$H(x, u, v) = v \cdot O\left(x^{k+1} \log x, \|u, v\| x^k\right).$$

$\operatorname{Re} \mu_j < 0$.

Se B ha solo autovalori con parte reale strettamente negativa, allora è facile dimostrare che, preso un punto (x, u, v) in $\mathcal{D}$, per n abbastanza grande, si ha che $\|v_{n+1}\| \geq \|v_n\|$. Infatti

$$\begin{aligned}
\|v_{n+1}\| &= \|(I - x_n^k B)v_n + v_n \cdot O\left(x_n^{k+1} \log x_n, \|u_n, v_n\| x_n^k\right)\| \\
&= \|v_n\| \left\|(I - x_n^k B) + O\left(x_n^{k+1} \log x_n, \|u_n, v_n\| x_n^k\right)\right\| \\
&\geq \|v_n\|,
\end{aligned}$$

dove l'ultima disuguaglianza segue dal fatto che $\left\|(I - x_n^k B) + O\left(x_n^{k+1} \log x_n, \|u_n, v_n\| x_n^k\right)\right\| \geq 1$, in quanto B ha soltanto autovalori con parte reale strettamente negativa.

Poiché, per ipotesi $\|v_n\| \to 0$ si deve avere $v_n = 0$. Quindi $\mathcal{D} \cap S_{\gamma,s,\rho} \subset \{v = 0\}$, che è una sottovarietà di dimensione $p - d - 1$.

$\operatorname{Re} \mu_j \leq 0$.

In questo caso sono presenti autovalori con parte reale nulla, quindi non è possibile dimostrare che $\|v_{n+1}\| \geq \|v_n\|$. Invece si vede che $\|x_{n+1}^{-\alpha} v_{n+1}\| \geq \|x_n^{-\alpha} v_n\|$ e quindi $x_n^{-\alpha} v_n$ converge a 0 solo se $v_n = 0$. E, di nuovo, $\mathcal{D}$ è una sottovarietà di dimensione $p - d - 1$.

Bibliografia

[A1] M. Abate. *Diagonalization of non-diagonalizable discrete holomorphic dynamical systems.* Amer. J. Math. Vol. 122 (2000), 757-781.

[A2] M. Abate. *The residual index and the dynamics of holomorphic maps tangent to the identity.* Duke Math. J. Vol. 107 (2001), 173-207.

[A3] M. Abate. *Sistemi dinamici olomorfi discreti.* Appunti Pisa, 2001.

[AB] M. Abate, E. Bedford, M. Brunella, D. Schleicker, N. Sibony. *Holomorphic dynamical systems.* Apparirà in Lect. Notes in Math., Springer-Verlag, Berlin, 2009.

[AT] M. Abate, F. Tovena. *Formal classification of holomorphic maps tangent to the identity.* Disc. Cont. Dyn. Sys. Suppl. (2005), 1–10.

[B] A. Beardon. *Iteration of rational functions.* Springer, New York, 1995.

[Bö] L.E. Boẗtcher. *The principal laws of convergence of iterates and their application to analysis.* Izv. Kazan. Fiz.-Mat. Obshch. 14 (1904), 155–234.

[Br1] A.D. Bryuno. *Convergence of transformations of differential equations to normal forms.* Dokl. Akad. Nauk. USSR 165 (1965), 987–989.

[Br2] A.D. Bryuno. *Analytical form of differential equations, I.* Trans. Moscow Math. Soc. 25 (1971), 131–288.

[Br3] A.D. Bryuno. *Analytical form of differential equations, II.* Trans. Moscow Math. Soc. 26 (1972), 199–239.

[C] C. Camacho. *On the local structure of conformal mappings and holomorphic vector fields.* Astérisque 5960 (1978), 83–94.

[CG] S. Carleson, F. Gamelin. *Complex dynamics.* Springer, Berlin, 1994.

[E1] J. Écalle. *Les fonctions résurgentes. Tome I. Les algèbres de fonctions rèsurgentes.* Publ. Math. Orsay 81-05, Université de Paris-Sud, Orsay, 1981.

[E2] J. Écalle. *Les fonctions résurgentes. Tome II. Les fonctions résurgentes appliquées à l'itération.* Publ. Math. Orsay 81-06, Université de Paris-Sud, Orsay, 1981.

[F1] P. Fatou. *Sur les équations fonctionnelles, I.* Bull. Soc. Math. France 47 (1919), 161–271.

[F2] P. Fatou. *Sur les équations fonctionnelles, II.* Bull. Soc. Math. France 48 (1920), 33–94.

[F3] P. Fatou. *Sur les équations fonctionnelles, III.* Bull. Soc. Math. France 48 (1920), 208–314.

[FS1] J.E. Fornæss e N. Sibony. *Complex dynamics in higher dimension, I.* In Complex Analytic Methods in Dynamical System, Astérisque 222 (1994), 201–231.

[FS2] J.E. Fornæss e N. Sibony. *Critically finite rational maps on* $\mathbb{P}^2$. Contemporary Mathematics 137 (1992), 245–260.

[H1] M. Hakim. *Analytic transformations of* $(\mathbb{C}^p, 0)$ *tangent to identity.* Duke Math. J. Vol. 92, (1998), 403–428.

[H2] M. Hakim. *Transformations tangent to identity. Stable pieces of manifolds.* Preprint.

[K] G. Kœnigs. *Recherches sur les integrals de certain equations fonctionelles.* Ann. Sci. Éc. Norm. Sup. 1 (1884), 1–41.

[Kr] S. Krantz. *Function theory of several complex variables.* 2nd ed. Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island, 2000.

[L] L. Leau. *Étude sur les equations fonctionelles à une ou plusieurs variables.* Ann. Fac. Sci. Toulouse 11 (1897), E1–E110.

[M] J. Milnor. *Dynamics in one complex variable.* 3rd ed. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2006.

[Mo] L. Molino. *The dynamics of maps tangent to the identity and with non-vanishing index.* Trans. Amer. Math. Soc. Vol. 361, (2009), 1597–1623.

[R1] M. Rivi. *Local behaviour of discrete dynamical systems.* Ph.D. Thesis, Università di Firenze, 1999.

[R2] M. Rivi. *Parabolic manifolds for semi-attractive holomorphic germs.* Mich. Math. J. 49 (2001), 211–241.

[S] A.A. Shcherbakov. *Topological classification of germs of conformal mappings with identity linear part.* Moscow Univ. Math. Bull. 37 (1982), 60–65.

[Si] C.L. Siegel. *Iteration of analytic functions*. Ann. of Math. 43 (1942), 607–612.

[V] S.M. Voronin. *Analytic classification of germs of conformal maps* $(\mathbb{C}, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ *with identity linear part*. Func. Anal. Appl. 15 (1981), 1–17.

[Y1] J.-C. Yoccoz. *Linéarisation des germes de difféomorphismes holomorphes de* $(\mathbb{C}, 0)$. C.R. Acad. Sci. Paris 306 (1988), 55–58.

[Y2] J.-C. Yoccoz. *Théorème de Siegel, nombres de Bryuno et polynomes quadratiques*. Astérisque 231 (1995), 3–88.